

”Утверждаю”  
Зав. кафедрой ММ  
Амосов А.А.

Экзаменационная программа  
по курсу ”Дифференциальные уравнения” (4 семестр)

## I. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

1. Второй метод А.М. Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости.
2. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.
3. Теорема Четаева о неустойчивости.

## II. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

4. Постановки краевых задач.
5. Тождество Лагранжа. Формула Грина.
6. Теорема о тривиальности решения однородной краевой задачи для уравнения  $L[u] = 0$ . Единственность решения неоднородной краевой задачи.
7. Неоднородная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка. Существование и единственность функции Грина.
8. Неоднородная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка. Представление решения с использованием функции Грина. Физический смысл функции Грина.
9. Первая краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка. Принцип максимума. Теоремы сравнения.
10. Первая краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка. Априорная оценка решения.
11. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных функций и собственных значений. Теорема Стеклова (без доказательства).

## III. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

12. Функционалы. Сильная и слабая дифференцируемость функционалов.
13. Необходимые условия локального экстремума функционала.
14. Дифференцируемость простейшего функционала вариационного исчисления  $J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$ .
15. Основная лемма вариационного исчисления.
16. Лемма Дюбуа-Реймона.
17. Уравнение Эйлера. Задачи со свободными и закрепленными концами. Естественные граничные условия.
18. Некоторые простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.
19. Задача о брахистохроне.
20. Задача с подвижными концами. Условие трансверсальности.

21. Задача Больца.

22. Функционалы вида  $J(\vec{y}) = \int_a^b F(x, \vec{y}(x), \vec{y}'(x)) dx$ . Необходимое условие экстремума. Система уравнений Эйлера.

23. Функционалы вида  $J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$ . Необходимые условия экстремума. Уравнение Эйлера и естественные граничные условия.

24. Минимизация выпуклых функционалов.

25. Вторая вариация функционала. Необходимое условие экстремума в терминах второй вариации.

26. Условие Лежандра.

27. Классические достаточные условия экстремума для простейшей задачи вариационного исчисления. Усиленные условия Лежандра. Усиленные условия Якоби. Формулировка основной теоремы (без доказательства).

28. Существование положительных решений уравнения Якоби и модифицированного уравнения Якоби.

29. Доказательство теоремы о достаточных условиях экстремума простейшей задачи вариационного исчисления.

30. Абстрактная изопериметрическая задача. Необходимое условие экстремума

31. Классическая изопериметрическая задача. Необходимое условие экстремума. Задача Дидоны.

32. Вариационные задачи на условный экстремум для функционала вида  $J(\vec{y}) = \int_a^b F(x, \vec{y}(x), \vec{y}'(x)) dx$  с голономными и неголономными связями.

33. Задача о геодезических линиях. Геодезические линии на сфере.

---

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.06

---

1. Постановки краевых задач.
2. Уравнение Эйлера. Задачи со свободными и закрепленными концами. Естественные граничные условия.

---

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.07

---

1. Неоднородная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка. Существование и единственность функции Грина.
2. Некоторые простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.07

1. Неоднородная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка. Представление решения с использованием функции Грина. Физический смысл функции Грина.
2. Задача о брахистохроне.

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.07

1. Теорема о тривиальности решения однородной краевой задачи для уравнения  $L[u] = 0$ . Единственность решения неоднородной краевой задачи.
2. Задача с подвижными концами. Условие трансверсальности.

---

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 5

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.07

---

1. Первая краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка. Принцип максимума. Теоремы сравнения.

2. Функционалы вида  $J(y) = \int_a^b F(x, \vec{y}(x), \vec{y}'(x)) dx$ . Необходимое условие экстремума. Система уравнений Эйлера.

---

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 6

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.07

---

1. Первая краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка. Априорная оценка решения.

2. Функционалы вида  $J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$ . Необходимые условия экстремума. Уравнение Эйлера и естественные граничные условия.

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.07

1. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных функций и собственных значений. Теорема Стеклова (без доказательства).
2. Классическая изопериметрическая задача. Необходимое условие экстремума. Задача Дидоны.

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 8

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.07

1. Исследование на устойчивость по первому приближению. Теорема о достаточных условиях асимптотической устойчивости.
2. Минимизация выпуклых функционалов.

---

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 9

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.07

---

1. Исследование на устойчивость по первому приближению. Теорема о достаточных условиях неустойчивости.

2. Вторая вариация функционала. Необходимое условие экстремума в терминах второй вариации.

---

---

---

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 10

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.07

---

1. Второй метод А.М. Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости.

2. Классические достаточные условия экстремума для простейшей задачи вариационного исчисления. Усиленное условие Лежандра. Усиленное условие Якоби. Формулировка основной теоремы (без доказательства).

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ N 11

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.07

- 
1. Функционалы. Сильная и слабая дифференцируемость функционалов.
  2. Существование положительных решений уравнения Якоби и модифицированного уравнения Якоби.

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ N 12

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.07

- 
1. Необходимые условия локального экстремума функционала.
  2. Доказательство теоремы о достаточных условиях экстремума простейшей задачи вариационного исчисления.

---

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ N 13

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.07

---

1. Дифференцируемость простейшего функционала вариационного исчисления

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx.$$

2. Абстрактная изопериметрическая задача. Необходимое условие экстремума.
- 
- 
- 

---

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ N 14

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.07

---

1. Основная лемма вариационного исчисления.

2. Вариационные задачи на условный экстремум для функционала вида

$$J(\vec{y}) = \int_a^b F(x, \vec{y}(x), \vec{y}'(x)) dx \text{ с голономными и неголономными связями.}$$

---

	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ N 15	Утверждаю
М Э И	Кафедра ММ	Зав.кафедрой ММ
	Дисциплина Дифференциальные уравнения	
	Институт АВТИ	06.06.07

---

1. Лемма Дюбуа-Реймона.
2. Задача о геодезических линиях. Геодезические линии на сфере.

---

---

---

	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ N 16	Утверждаю
М Э И	Кафедра ММ	Зав.кафедрой ММ
	Дисциплина Дифференциальные уравнения	
	Институт АВТИ	06.06.07

---

1. Тожество Лагранжа. Формула Грина.
2. Абстрактная изопериметрическая задача.

---

	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ N 17	Утверждаю
М Э И	Кафедра ММ	Зав.кафедрой ММ
	Дисциплина Дифференциальные уравнения	
	Институт АВТИ	06.06.07

---

1. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.
2. Задача Больца.

---

	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ N 18	Утверждаю
М Э И	Кафедра ММ	Зав.кафедрой ММ
	Дисциплина Дифференциальные уравнения	
	Институт АВТИ	06.06.07

---

1. Теорема Четаева о неустойчивости.
2. Дифференцируемость простейшего функционала вариационного исчисления  
$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx.$$

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ N 19

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.07

1. Второй метод А.М. Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости.
2. Условие Лежандра.

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ N 20

Утверждаю

М Э И

Кафедра ММ

Зав.кафедрой ММ

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Институт АВТИ

06.06.07

1. Неоднородная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка. Существование и единственность функции Грина.
2. Некоторые простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.