Ч _1_02_07

$$\sin\left(\pi/3+i\right)=\frac{e^{i(\pi/3+i)}-e^{-i(\pi/3+i)}}{2i}=\frac{e^{-1+\pi i/3}-e^{1-\pi i/3}}{2i}=$$

$$=\frac{e^{-1}\left(\cos\left(\pi/3\right)+i\sin\left(\pi/3\right)\right)-e\left(\cos\left(-\pi/3\right)+i\sin\left(-\pi/3\right)\right)}{2i}=$$

$$=\frac{e^{-1}\left(\cos\left(\pi/3\right)+i\sin\left(\pi/3\right)\right)-e\left(\cos\left(\pi/3\right)-i\sin\left(\pi/3\right)\right)}{2i}=$$

$$=\frac{\left(e^{-1}-e\right)\cos\left(\pi/3\right)+i\sin\left(\pi/3\right)\left(e^{-1}+e\right)}{2i}=$$

$$=\frac{i^{2}\left(e^{1}-e^{-1}\right)\cos\left(\pi/3\right)+i\sin\left(\pi/3\right)\left(e^{-1}+e^{1}\right)}{2i}=\frac{i^{2}\left(e^{1}-e^{-1}\right)\cdot\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(e^{-1}+e^{1}\right)}{2i}=$$

$$=\frac{i^{2}\operatorname{sh}1+i\cdot\sqrt{3}\operatorname{ch}1}{2i}=\frac{i^{2}\operatorname{sh}1}{2i}+\frac{i\cdot\sqrt{3}\operatorname{ch}1}{2i}=\frac{\sqrt{3}\operatorname{ch}1}{2}+\frac{\operatorname{sh}1}{2}\cdot i$$

$Ч\_1\_03\_07$

$$\operatorname{arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right)\overset{(**)}{=}\frac{-1}{2}\ln\frac{1-\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}+1}=\frac{-1}{2}\ln\frac{3-\left(3+i2\sqrt{3}\right)}{3+3+i2\sqrt{3}}=\frac{-1}{2}\ln\frac{-i2\sqrt{3}}{6+i2\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{-1}{2}\ln\frac{-i2\sqrt{3}\left(6-i2\sqrt{3}\right)}{\left(6+i2\sqrt{3}\right)\left(6-i2\sqrt{3}\right)}=\frac{-1}{2}\ln\frac{-i2\sqrt{3}\left(6-i2\sqrt{3}\right)}{6^2+4\cdot 3}=\frac{-1}{2}\ln\frac{-12-i12\sqrt{3}}{48}=$$

$$=\frac{-1}{2}\ln\frac{-1-i\sqrt{3}}{4}\overset{(*)}{=}\frac{-1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}+i\left(\frac{-2\pi}{3}+2\pi k\right)\right)=\frac{-1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\left(\frac{-2\pi}{3}+2\pi k\right)=$$

$$=\ln\sqrt{2}+\frac{i\pi}{3}-i\pi k, k\in Z$$

(*)

$$\ln z=\ln|z|+i\left(\arg z+2\pi k\right), k\in Z$$

$$\left|-\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{4}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

$$\arg\left(-\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{-2\pi}{3}$$

(**)

$$\operatorname{arth} z=\frac{-1}{2}\ln\frac{1-z}{z+1}$$

1_04_07

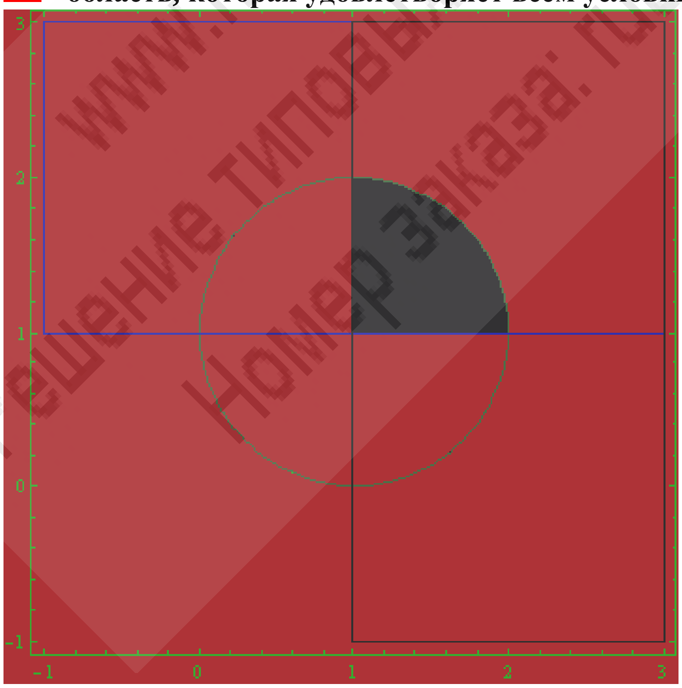
$|z-1-i|\le 1, \operatorname{Im} z > 1, \operatorname{Re} z \ge 1$

На графике:

На горизонтальной оси отложена $\operatorname{Re}(z)$ – *реальная часть числа.*

На вертикальной оси отложена $\operatorname{Im}(z)$ – *мнимая часть числа.*

- область, которая удовлетворяет всем условиям (ответ)



$Ч\_1\_06\_07$

$v = e^{-y}\sin x + y,\ f(0) = 1$

$$\text{Условия Коши} - \text{Римана}: \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{-\partial V}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -e^{-y}\sin x + 1$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(x,y) = \int\left(-e^{-y}\sin x + 1\right)\mathrm{dx} + \varphi(y) = x + e^{-y}\cos x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = e^{-y}\cos x$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -e^{-y}\cos x + \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-\partial U}{\partial y} \Rightarrow e^{-y}\cos x = -\left(-e^{-y}\cos x + \varphi'(y)\right) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C$$

$$U(x,y) = x + e^{-y}\cos x + C$$

$$f(z) = U(x,y) + i\cdot V(x,y) = x + e^{-y}\cos x + C + i\left(e^{-y}\sin x + y\right) =$$

$$= x + e^{-y}\cos x + C + e^{-y} i\sin x + iy = \left(x + iy\right) + e^{-y}\left(\cos x + i\sin x\right) + C$$

$$= \left(x + iy\right) + e^{i^2 y}\cdot e^{ix} + C = \left(x + iy\right) + e^{ix + i^2 y} + C = \left(x + iy\right) + e^{i(x+iy)} + C = z + e^{iz} + C$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow C = 0$$

$$f(z) = z + e^{iz}$$

Ч _1_07_07

$$\int_{AB} \overline{z}^2\,\mathrm{dz}$$

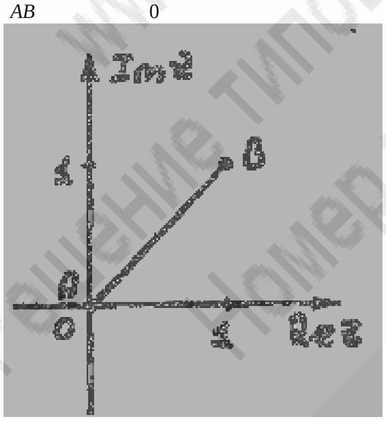
$AB - \textit{отрезок прямой}, z_A = 0, z_B = 1 + i$

$\textit{параметризация}: z = t, y = t$

$z = x + iy \Rightarrow \overline{z} = x - iy = t - it = t(1-i), \overline{z}^2 = (1-i)^2 t^2$

$\mathrm{dz} = (1+i)\,\mathrm{dt}$

$$\int_{AB} \overline{z}^2\,\mathrm{dz} = \int_0^1 (1-i)^2 t^2 (1+i)\,\mathrm{dt} = (1-i)^2 (1+i)\int_0^1 t^2\,\mathrm{dt} = (1-i)^2(1+i)\left(\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2(1-i)}{3}$$



Ч _1_08_07

$$f(z)=\frac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}$$

Знаменатель данной функции обращается в нуль при $z_1=0, z_2=-7, z_3=7/2$

$$f(z)=\frac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}=\frac{7z-98}{z(z+7)(2z-7)}$$

С центром в точке $z=0$ *можно построить три области, в которых данная функция аналитична* $: 0<|z|<7/2, 7/2<|z|<7, |z|>7$

Разложим дробь на элементарные

$$\frac{7z-98}{z(z+7)(2z-7)}=\frac{a}{z}+\frac{b}{z+7}+\frac{s}{2z-7}=\frac{a(z+7)(2z-7)+bz(2z-7)+sz(z+7)}{z(z+7)(2z-7)}$$

$$a(z+7)(2z-7)+bz(2z-7)+sz(z+7)=7z-98\Rightarrow\begin{cases}z=0:-49a=-98\\ z=-7:147b=-147\\ z=7/2:147s/4=-147/2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-1\\ s=-2\end{cases}$$

$$\frac{7z-98}{z(z+7)(2z-7)}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z+7}-\frac{2}{2z-7}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z+7}-\frac{1}{z-7/2}$$

$1) 0<|z|<7/2$

$$\frac{7z-98}{z(z+7)(2z-7)}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z+7}-\frac{1}{z-7/2}=\frac{2}{z}-\frac{1}{7}\frac{1}{1+z/7}+\frac{1}{7/2}\frac{1}{1-2z/7}=$$

$$=\frac{2}{z}-\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{7}\right)^n+\frac{1}{7/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2z}{7}\right)^n=\frac{2}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{7^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3.5^{n+1}}=\frac{2}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-(-1)^n}{7^{n+1}}z^n$$

$2) 7/2<|z|<7$

$$\frac{7z-98}{z(z+7)(2z-7)}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z-7/2}-\frac{1}{z+7}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-3.5/z}-\frac{1}{7}\frac{1}{1+z/7}=$$

$$=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3.5}{z}\right)^n-\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{7}\right)^n=\frac{2}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3.5^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{7^{n+1}}$$

$3) |z|>7$

$$\frac{7z-98}{z(z+7)(2z-7)}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z-7/2}-\frac{1}{z+7}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-3.5/z}-\frac{1}{z}\frac{1}{1+7/z}=$$

$$=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3.5}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-7}{z}\right)^n=\frac{2}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3.5^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-7)^n}{z^{n+1}}=\frac{2}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3.5^n+(-7)^n}{z^{n+1}}=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3.5^n+(-7)^n}{z^{n+1}}$$

Ч _1_ 09 _ 07

$$\frac{z-1}{z(z+1)},\ z_0=2i-1$$

Фунция имеет две особые точки : $z_1=0, z_2=-1,$ *а центр разложения находится* z_0. *Расстояние от* z_0 *до* z_1 *равно* $\sqrt{5}$, *расстояние от* z_0 *до* z_2 *равно* 2.

Можно построить три сходящхся ряда Лорана по степеням $z-z_0$

1) *в круге* $|z-z_0|<2$

2) *в кольце* $2<|z-z_0|<\sqrt{5}$

3) *вне круга* $|z-z_0|>\sqrt{5}$

Разложим дробь на элементарные

$$\frac{z-1}{z(z+1)}=\frac{-1}{z-0}+\frac{2}{z+1}$$

1) $|z-z_0|<2$

$$\frac{z-1}{z(z+1)}=\frac{-1}{2i-1-0+z-(2i-1)}+\frac{2}{2i-1-(-1)+z-(2i-1)}=\frac{-1}{2i-1-0}\frac{1}{1+\dfrac{z-(2i-1)}{2i-1-0}}+$$

$$+\frac{2}{2i-1-(-1)}\frac{1}{1+\dfrac{z-(2i-1)}{2i-1-(-1)}}=\frac{1}{1-2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2i+1}{2i-1}\right)^n+\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2i+1}{2i}\right)^n$$

2) $2<|z-z_0|<\sqrt{5}$

$$\frac{z-1}{z(z+1)}=\frac{-1}{2i-1-0+z-(2i-1)}+\frac{2}{z-(2i-1)+2i-1-(-1)}=\frac{-1}{2i-1-0}\frac{1}{1+\dfrac{z-(2i-1)}{2i-1-0}}+$$

$$+\frac{2}{z-(2i-1)}\frac{1}{1+\dfrac{2i-1-(-1)}{z-(2i-1)}}=\frac{1}{1-2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2i+1}{2i-1}\right)^n+\frac{2}{z-2i+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2i}{z-2i+1}\right)^n$$

3) $|z-z_0|>\sqrt{5}$

$$\frac{z-1}{z(z+1)}=\frac{-1}{z-(2i-1)+2i-1-0}+\frac{2}{z-(2i-1)+2i-1-(-1)}=\frac{-1}{z-(2i-1)}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2i-1-0}{z-(2i-1)}}+$$

$$+\frac{2}{z-(2i-1)}\frac{1}{1+\dfrac{2i-1-(-1)}{z-(2i-1)}}=\frac{-1}{z-2i+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2i-1}{z-2i+1}\right)^n+\frac{2}{z-2i+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2i}{z-2i+1}\right)^n$$

$Ч\_1\_10\_07$

$$\sin\frac{3z-i}{3z+i},\ z_0=-i/3$$

$$\sin\frac{3z-i}{3z+i}=\sin\frac{3z+i-2i}{3z+i}=\sin\left(1-\frac{2i}{3z+i}\right)=$$

$$=\sin1\cos\frac{2i}{3z+i}-\cos1\sin\frac{2i}{3z+i}\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=}\sin1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{2i}{3z+i}\right)^{2n}}{(2n)!}-\cos1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{2i}{3z+i}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=$$

$$=\sin1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n}i^{2n}}{(3z+i)^{2n}(2n)!}-\cos1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n+1}i^{2n+1}}{(3z+i)^{2n+1}(2n+1)!}=$$

$$=\sin1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n}\left(i^2\right)^n}{(3z+i)^{2n}(2n)!}-\cos1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n+1}\left(i^2\right)^n\cdot i}{(3z+i)^{2n+1}(2n+1)!}=$$

$$=\sin1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n}(-1)^n}{(3z+i)^{2n}(2n)!}-\cos1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n+1}(-1)^n\cdot i}{(3z+i)^{2n+1}(2n+1)!}=$$

$$=\sin1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2/3)^{2n}}{(z+i/3)^{2n}(2n)!}-\cos1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2/3)^{2n+1}\cdot i}{(z+i/3)^{2n+1}(2n+1)!}$$

(*)

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Ч _1_11_07

$$z \cdot \sin\frac{6}{z^2}$$

$$z \cdot \sin\frac{6}{z^2} = z\left(\frac{6}{z^2} - \frac{\left(6/z^2\right)^3}{3!} + \dots\right) = z\left(\frac{6}{z^2} - \frac{6^3}{z^6 \cdot 3!} + \dots\right) = \frac{6}{z} - \frac{6^3}{z^5 \cdot 3!} + \dots$$

т.к. в разложении присутствует бесконечное число слагаемых с отрицательными степенями z, *то* $z = 0$ – *существенно особая точка*

Ч _1_12_07

$$\frac{(z+\pi)\sin\frac{\pi z}{2}}{z\sin^2 z}$$

$\textit{Особые точки}: z=0, z=-\pi, z=\pi k (k\in Z, k\neq 0,-1)$

$z=0$ – *полюс* 2*го порядка, потому что*

$$\lim_{z\to 0}\frac{(z-0)^2(z+\pi)\sin\frac{\pi z}{2}}{z\sin^2 z}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2(z+\pi)\frac{\pi z}{2}}{z\cdot z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\pi(z+\pi)}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

$z=-\pi$ – *полюс* 1*го порядка, потому что*

$$\lim_{z\to -\pi}\frac{(z+\pi)(z+\pi)\sin\frac{\pi z}{2}}{z\sin^2 z}=\left|\begin{matrix}t=z+\pi\\ z=t-\pi\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot t\cdot\sin\frac{\pi(t-\pi)}{2}}{(t-\pi)\sin^2(t-\pi)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot t\cdot\sin\frac{\pi(t-\pi)}{2}}{(t-\pi)\sin^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot t\cdot\sin\frac{\pi(t-\pi)}{2}}{(t-\pi)t^2}=\frac{\sin\frac{\pi^2}{2}}{\pi}$$

$z=\pi k (k\in Z, k\neq 0,-1)$ – *полюсы* 2*го порядка, потому что*

$$f(z)=\frac{(z+\pi)\sin\frac{\pi z}{2}}{z\sin^2 z}=\frac{1}{(z-\pi)^2}\cdot\frac{(z-\pi)^2}{\sin^2(z-\pi)}\cdot\frac{(z+\pi)\sin\frac{\pi z}{2}}{z}$$