Ч _1_ 07 _06

$$\int\limits_{AB}\left(12z^5+4z^3+1\right)\mathrm{dz}$$

$AB: z_A=1, z_B=i$

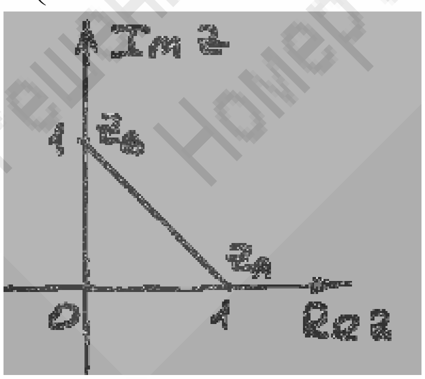
$z=z+iy, y=1-x \Rightarrow z=x+i(1-x), \mathrm{dz}=(1-i)\mathrm{dx}$

$$\int\limits_{AB}\left(12z^5+4z^3+1\right)\mathrm{dz}=\int\limits_1^0\left(12\left(x+i(1-x)\right)^5+4\left(x+i(1-x)\right)^3+1\right)(1-i)\mathrm{dx}=$$

$$=\left(\frac{12}{6}\left(x+i(1-x)\right)^6+\frac{4}{4}\left(x+i(1-x)\right)^4+\left(x+i(1-x)\right)\right)\Big|_1^0=$$

$$=\left(\frac{12}{6}\left(0+i(1-0)\right)^6+\frac{4}{4}\left(0+i(1-0)\right)^4+\left(0+i(1-0)\right)\right)-$$

$$-\left(\frac{12}{6}\left(1+i(1-1)\right)^6+\frac{4}{4}\left(1+i(1-1)\right)^4+\left(1+i(1-1)\right)\right)=i-5$$



Решение типовых от 80 за задачу
www.matformula.ru
Номер заказа: 14105140

Ч _1_08_06

$$\frac{3z-26}{z^4+3z^3-18z^2}$$

Знаменатель данной функции обращается в нуль при $z_1=0, z_2=3, z_3=-6$

$$f(z)=\frac{3z-26}{z^4+3z^3-18z^2}=\frac{3z-26}{z^2(z-3)(z+6)}$$

С центром в точке $z=0$ *можно построить три области, в которых данная функция аналитична* $: 0<|z|<3, 3<|z|<6, |z|>6$

Разложим дробь на элементарные

$$\frac{3z-26}{z^2(z-3)(z+6)}=\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}+\frac{s}{z-3}+\frac{w}{z+6}=$$

$$=\frac{az(z-3)(z+6)+b(z-3)(z+6)+sz^2(z+6)+wz^2(z-3)}{z^2(z-3)(z+6)}$$

$$az(z-3)(z+6)+b(z-3)(z+6)+sz^2(z+6)+wz^2(z-3)=3z-36\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z=0:-18b=-36\\ z=3:81s=-27\\ z=-6:-324w=-54\\ z=1:-14a-14b+7s-2w=-33\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2\\ s=-1/3\\ w=1/6\\ -92/3-14a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2\\ s=-1/3\\ w=1/6\\ a=1/6\end{cases}$$

$$\frac{3z-26}{z^2(z-3)(z+6)}=\frac{1}{6z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z+6}$$

1)$0<|z|<3$

$$\frac{3z-26}{z^2(z-3)(z+6)}=\frac{1}{6z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z+6}=\frac{1}{6z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-z/3}+\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{1+z/6}=$$

$$=\frac{1}{6z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{9}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n+\frac{1}{36}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{6}\right)^n=\frac{1}{6z}+\frac{2}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}+(-1)^n}{6^{n+2}}z^n$$

2)$3<|z|<6$

$$\frac{3z-26}{z^2(z-3)(z+6)}=\frac{1}{6z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z+6}=\frac{1}{6z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{3z}\cdot\frac{1}{1-3/z}+\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{1+z/6}=$$

$$=\frac{1}{6z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n+\frac{1}{36}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{6}\right)^n=\frac{1}{6z}+\frac{2}{z^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n\ n}}{6^{n+2}}$$

3)$|z|>6$

$$\frac{3z-26}{z^2(z-3)(z+6)}=\frac{1}{6z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z+6}=\frac{1}{6z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{3z}\cdot\frac{1}{1-3/z}+\frac{1}{6z}\cdot\frac{1}{1+6/z}=$$

$$=\frac{1}{6z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{3z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n+\frac{1}{6z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-6}{z}\right)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 6^{n-1}-3^{n-1}}{z^{n+1}}$$

Решение Типовых от 3р за задачу www.matburo.ru Номер заказа: ru41045140

$Ч\_1\_09\_06$

$$\frac{z-1}{z(z+1)}, z_0 = 2-i$$

Фунция имеет две особые точки : $z_1 = -1, z_2 = 0$, *а центр разложения находится* z_0. *Расстояние от* z_0 *до* z_1 *равно* $\sqrt{10}$, *расстояние от* z_0 *до* z_2 *равно* $\sqrt{5}$.

Можно построить три сходящхся ряда Лорана по степеням $z - z_0$

1) *в круге* $|z-z_0| < \sqrt{5}$

2) *в кольце* $\sqrt{5} < |z-z_0| < \sqrt{10}$

3) *вне круга* $|z-z_0| > \sqrt{10}$

Разложим дробь на элементарные

$$\frac{z-1}{z(z+1)} = \frac{2}{z-(-1)} + \frac{-1}{z-0}$$

1) $|z-z_0| < \sqrt{5}$

$$\frac{z-1}{z(z+1)} = \frac{2}{2-i-(-1)+z-(2-i)} + \frac{-1}{2-i-0+z-(2-i)} = \frac{2}{2-i-(-1)} \frac{1}{1+\dfrac{z-(2-i)}{2-i-(-1)}} +$$

$$+\frac{-1}{2-i-0} \frac{1}{1+\dfrac{z-(2-i)}{2-i-0}} = \frac{2}{3-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2+i}{i-3}\right)^n + \frac{1}{i-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2+i}{i-2}\right)^n$$

2) $\sqrt{5} < |z-z_0| < \sqrt{10}$

$$\frac{z-1}{z(z+1)} = \frac{2}{2-i-(-1)+z-(2-i)} + \frac{-1}{z-(2-i)+2-i-0} = \frac{2}{2-i-(-1)} \frac{1}{1+\dfrac{z-(2-i)}{2-i-(-1)}} +$$

$$+\frac{-1}{z-(2-i)} \frac{1}{1+\dfrac{2-i-0}{z-(2-i)}} = \frac{2}{3-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2+i}{i-3}\right)^n + \frac{-1}{z-2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i-2}{z-2+i}\right)^n$$

3) $|z-z_0| > \sqrt{10}$

$$\frac{z-1}{z(z+1)} = \frac{2}{z-(2-i)+2-i-(-1)} + \frac{-1}{z-(2-i)+2-i-0} = \frac{2}{z-(2-i)} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{2-i-(-1)}{z-(2-i)}} +$$

$$+\frac{-1}{z-(2-i)} \frac{1}{1+\dfrac{2-i-0}{z-(2-i)}} = \frac{2}{z-2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i-3}{z-2+i}\right)^n + \frac{-1}{z-2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i-2}{z-2+i}\right)^n$$

$Ч\_1\_10\_06$

$$\sin\frac{5z}{z-2i},\, z_0 = 2i$$

$$\sin\frac{5z}{z-2i} = \sin\frac{5(z-2i)+10i}{z-2i} = \sin\left(5+\frac{10i}{z-2i}\right) =$$

$$= \sin 5\cdot\cos\frac{10i}{z-2i} + \cos 5\sin\frac{10i}{z-2i} \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \sin 5\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{10i}{z-2i}\right)^{2n}}{(2n)!} + \cos 5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{10i}{z-2i}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sin 5\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 10^{2n}\cdot i^{2n}}{(z-2i)^{2n}(2n)!} + \cos 5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 10^{2n+1} i^{2n+1}}{(z-2i)^{2n+1}(2n+1)!} =$$

$$= \sin 5\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 10^{2n}\cdot\left(i^2\right)^n}{(z-2i)^{2n}(2n)!} + \cos 5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 10^{2n+1}\left(i^2\right)^n\cdot i}{(z-2i)^{2n+1}(2n+1)!} =$$

$$= \sin 5\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 10^{2n}\cdot(-1)^n}{(z-2i)^{2n}(2n)!} + \cos 5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 10^{2n+1}(-1)^n\cdot i}{(z-2i)^{2n+1}(2n+1)!} =$$

$$= \sin 5\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^{2n}}{(z-2i)^{2n}(2n)!} + \cos 5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^{2n+1}\cdot i}{(z-2i)^{2n+1}(2n+1)!}$$

(*)

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$Ч\_1\_11\_06$

$$\frac{\operatorname{ch}5z-1}{e^z-1-z}, z_0=0$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{ch}5z-1}{e^z-1-z}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{1+(5z)^2/2!+(5z)^4/4!+\ldots-1}{1+z+z^2/2!+z^3/3!+\ldots-1-z}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(5z)^2/2!+(5z)^4/4!+\ldots}{z^2/2!+z^3/3!+\ldots}=\lim_{z\to 0}\frac{5^2/2!+5^4z^2/4!+\ldots}{1/2!+z/3!+\ldots}=25$$

т.е. $z=0$ – *устранимая особая точка*

www.matburo.ru Решение типовых задач Номер заказа: ru4 [illegible]

$Ч\_1\_12\_06$

$$\frac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$$

Особые точки: $z=i$ *и* $z=\pm 2i$

$z=i$ – *полюс 1го порядка, потому что*

$$\lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z^2+1)}{(z-i)^2(z^2+4)}=\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{(z-i)(z^2+4)}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z+i)}{(z-i)(z^2+4)}=\lim_{z\to i}\frac{z+i}{z^2+4}=\frac{2i}{3}$$

$z=2i$ – *полюс 1го порядка, потому что*

$$\lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)(z^2+1)}{(z-i)^2(z^2+4)}=\lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)(z^2+1)}{(z-i)^2(z-2i)(z+2i)}=\lim_{z\to 2i}\frac{z^2+1}{(z-i)^2(z+2i)}=\frac{-3i}{4}$$

$z=-2i$ – *полюс 1го порядка, потому что*

$$\lim_{z\to -2i}\frac{(z+2i)(z^2+1)}{(z-i)^2(z^2+4)}=\lim_{z\to -2i}\frac{(z+2i)(z^2+1)}{(z-i)^2(z+2i)(z-2i)}=\lim_{z\to -2i}\frac{z^2+1}{(z-i)^2(z-2i)}=\frac{i}{12}$$

Решение типовых от 8р за задачу
www.matformula.ru
Номер заказа: ru1045140

$Ч\_1\_13\_06$

$$\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z}\,dz$$

В контур интегрирования попадают 2 *особые точеки*:

$z=0$ – *устранимая особая точка и*

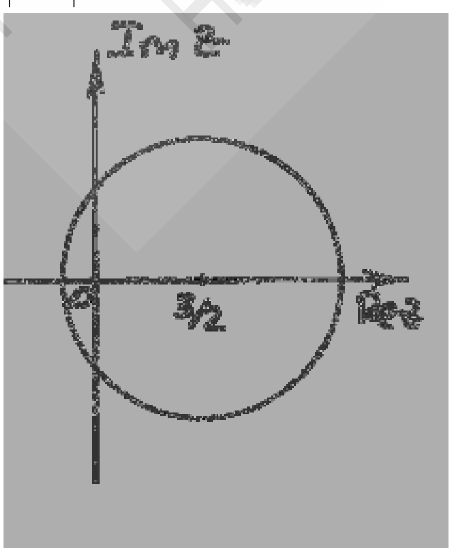
$z=\pi$ – *полюс* 1*го порядка*

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=0$$

$$\operatorname*{res}_{z=\pi} f(z)=\lim_{z\to\pi}\frac{z(\sin z+z)(z-\pi)}{\sin z}=$$

$$=-\lim_{z\to\pi}\left(\frac{(z-\pi)}{\sin(z-\pi)}z(\sin z+z)\right)=-2\pi$$

$$\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z}\,dz=2\pi i(0-2\pi)=-4\pi^2 i$$



Решение типовых от 80 за задачу www.matformula.ru
Номер заказа ru41045140

Ч _1_14_06

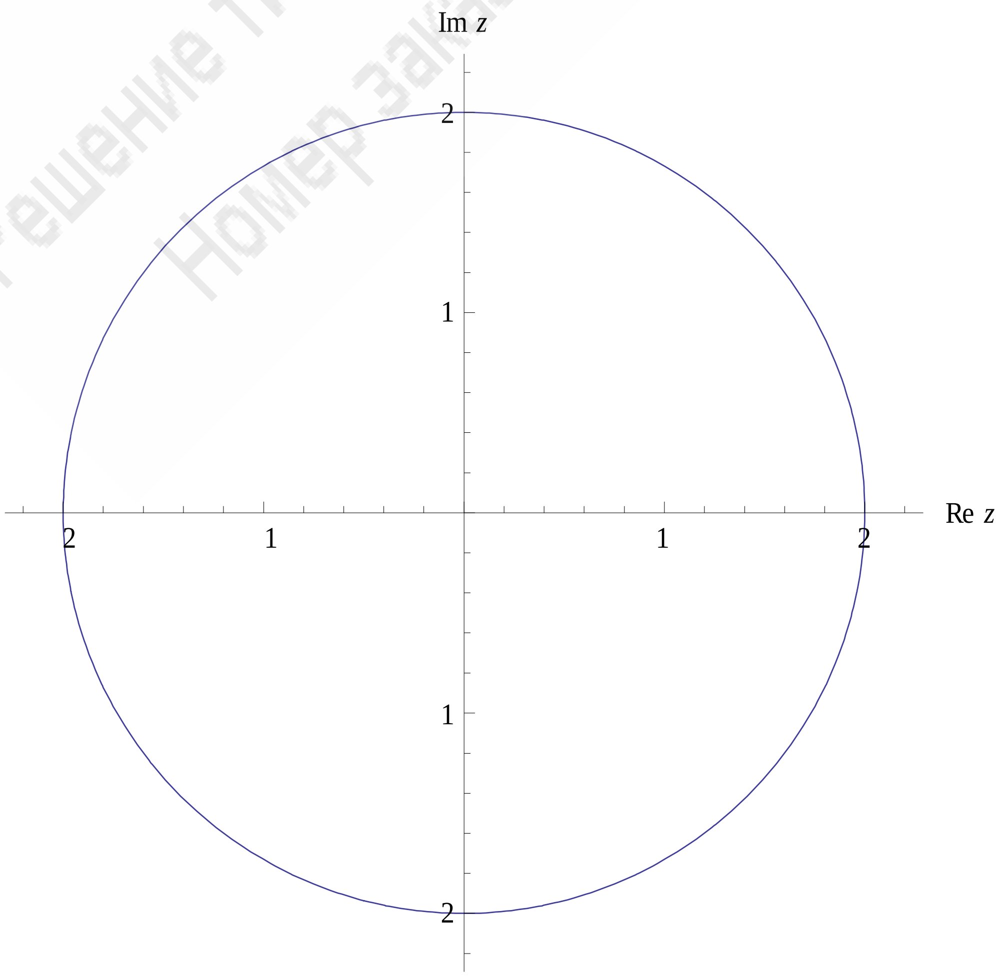
$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2}\,\mathrm{dz}$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

$z = 0$ – *устранимая особая точка, т.к.*

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{2\sin^2\left(z^2/2\right)}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{2\left(z^2/2\right)^2}{z^2} = 0 \Rightarrow \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0$$

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2}\,\mathrm{dz} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f\left(z\right) = 2\pi i \cdot 0 = 0$$



Ч _1_15_06

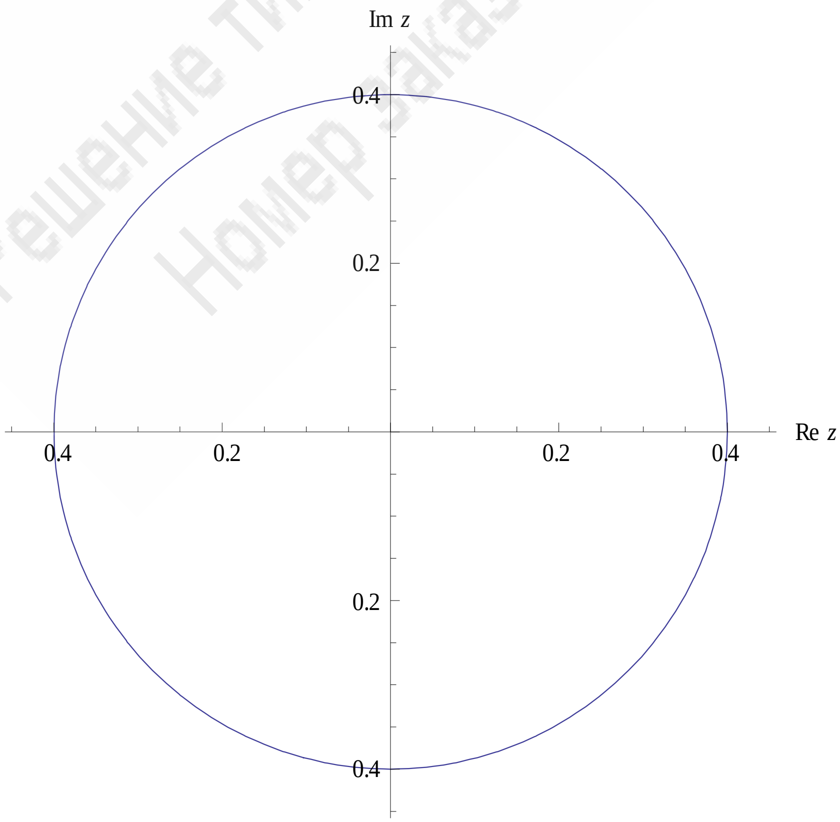
$$\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{4z} - \cos 7z}{z \operatorname{sh} 2\pi z} dz$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка :

$z = 0$ – *полюс 1го порядка*

$$\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{4z} - \cos 7z}{z \operatorname{sh} 2\pi z} dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{e^{4z} - \cos 7z}{\operatorname{sh} 2\pi z} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{4e^{4z} + 7\sin 7z}{2\pi \operatorname{ch} 2\pi z} = 2\pi i \cdot \frac{2}{\pi} = 4i$$



$Ч\_1\_16\_06$

$$\oint\limits_{|z+3|=2}\left(z\,\mathrm{sh}\frac{i}{z+3}-\frac{4\,\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2\cdot z}\right)\mathrm{dz}=I=I_1-I_2$$

$$I_1=\oint\limits_{|z+3|=2} z\,\mathrm{sh}\frac{i}{z+3}\mathrm{dz}$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

$z=-3$ *– существенно особая точка*

$$\operatorname*{res}_{z=-3} f_1(z)=C_{-1}$$

$$z\,\mathrm{sh}\frac{i}{z+3}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot(z+3)^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n+1}(z+3-3)}{(2n+1)!\cdot(z+3)^{2n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{(z+3)^{2n}}-\frac{3}{(z+3)^{2n+1}}\right)=i-\frac{3i}{z+3}-\frac{i}{6(z+3)^2}+\ldots\Rightarrow C_{-1}=-3i$$

$$I_1=2\pi i\operatorname*{res}_{z=-3} f_1(z)=2\pi i\cdot C_{-1}=6\pi$$

$$I_2=\oint\limits_{|z+3|=2}\frac{4\,\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2\cdot z}\mathrm{dz}$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

$z=-2$ *– полюс 2го порядка*

$$I_2=\oint\limits_{|z+3|=2}\frac{4\,\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2\cdot z}\mathrm{dz}=2\pi i\operatorname*{res}_{z=-2} f_2(z)=2\pi i\lim_{z\to-2}\frac{d}{\mathrm{dz}}\frac{4\,\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{4}}{z}=$$

$$=8\pi i\lim_{z\to-2}\frac{\mathrm{ch}\frac{\pi iz}{4}\cdot\frac{\pi i}{4}\cdot z-\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{4}}{z^2}=8\pi i\cdot\frac{-i}{4}=-2\pi$$

$$I=I_1-I_2=6\pi-(-2\pi)=8\pi$$

$Ч\_1\_17\_06$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\sin t}$$

полагаем: $z = e^{it} \Rightarrow \sin t = \frac{z^2-1}{2iz}, dt = \frac{dz}{iz}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\sin t} = \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{5-4\frac{z^2-1}{2iz}} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{-2z^2+5iz+2} = \frac{-1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-i/2)(z-2i)}$$

Особые точки подынтегральной функции:

$z = i/2$

$z = 2i$

В контур интегрирования попадет только

$z = i/2$ – *полюс* 1*го порядка*

$$\frac{-1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{(z-i/2)(z-2i)} = \frac{-1}{2}\cdot 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i/2} f(z) = \frac{-1}{2}\cdot 2\pi i \cdot \lim_{z\to i/2} \frac{1}{z-2i} = -\pi i \cdot \frac{2i}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

www.mathformula.ru
Решение типовых от 80р за задачу
Номер заказа: 104105140

$Ч\_1\_18\_06$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(4+\cos t)^2}$$

Полагаем: $z=e^{it}\Rightarrow dt=\dfrac{dz}{iz},\cos t=\dfrac{z^2+1}{2z}$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(4+\cos t)^2}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\left(4+\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2}=\frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z-\left(-4-\sqrt{15}\right)\right)^2\left(z-\left(-4+\sqrt{15}\right)\right)^2}$$

Особые точки подынтегральной функции:

$z_1=-4+\sqrt{15}$

$z_2=-4-\sqrt{15}$

В контур интегрирования попадет только одна особая точка:

z_1 – *полюс 2го порядка*

$$\frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z-\left(-4-\sqrt{15}\right)\right)^2\left(z-\left(-4+\sqrt{15}\right)\right)^2}=\frac{4}{i}2\pi i\operatorname*{res}_{z=z_1}f(z)=8\pi\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-z_2)^2}=$$

$$=8\pi\lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_2)^2-2z(z-z_2)}{(z-z_2)^4}=8\pi\lim_{z\to z_1}\frac{-z-z_2}{(z-z_2)^3}=8\pi\frac{-\left(-4+\sqrt{15}\right)-\left(-4-\sqrt{15}\right)}{\left(-4+\sqrt{15}-\left(-4-\sqrt{15}\right)\right)^3}=$$

$$=8\pi\cdot\frac{1}{15\sqrt{15}}=\frac{8\pi}{15\sqrt{15}}$$