$Ч\_1\_08\_08$

$$\frac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}$$

Знаменатель данной функции обращается в нуль при $z_1=0, z_2=4, z_3=-8$

$$f(z)=\frac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}=\frac{4z-64}{z^2(z-4)(z+8)}$$

С центром в точке $z=0$ *можно построить три области, в которых данная функция аналитична* $: 0<|z|<4, 4<|z|<8, |z|>8$

Разложим дробь на элементарные

$$\frac{4z-64}{z^2(z-4)(z+8)}=\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}+\frac{s}{z-4}+\frac{w}{z+8}=$$

$$=\frac{az(z-4)(z+8)+b(z-4)(z+8)+sz^2(z+8)+wz^2(z-4)}{z^2(z-4)(z+8)}$$

$$az(z-4)(z+8)+b(z-4)(z+8)+sz^2(z+8)+wz^2(z-4)=4z-64\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} z=0:-32b=-64\\ z=4:192s=-48\\ z=-8:-768w=-96\\ z=-1:-27a-27b+9s-3w=-60\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=2\\ s=-1/4\\ w=1/8\\ a=1/8\end{cases}$$

$$\frac{4z-64}{z^2(z-4)(z+8)}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{z+8}$$

$1) 0<|z|<4$

$$\frac{4z-64}{z^2(z-4)(z+8)}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{z+8}=\frac{4z-64}{z^2(z-4)(z+8)}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1-z/4}+$$

$$+\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{1+z/8}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{16}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n+\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{8}\right)^n=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2^{n+2}+(-1)^n\right)z^n}{8^{n+2}}$$

$2) 4<|z|<8$

$$\frac{4z-64}{z^2(z-4)(z+8)}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{4z}\cdot\frac{1}{1-4/z}+\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{1+z/8}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{4z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n+\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{8}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{8^{n+2}}$$

$3) |z|>8$

$$\frac{4z-64}{z^2(z-4)(z+8)}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{4z}\cdot\frac{1}{1-4/z}+\frac{1}{8z}\cdot\frac{1}{1+8/z}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{4z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n+\frac{1}{8z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-8}{z}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 8^{n-1}}{z^{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 8^{n-1}-4^{n-1}}{z^{n+1}}$$

Ч _1_09_08

$$\frac{z-1}{z(z+1)}, z_0=-2-3i$$

Фунция имеет две особые точки : $z_1=0, z_2=-1,$ *а центр разложения находится* z_0. *Расстояние от* z_0 *до* z_1 *равно* $\sqrt{13}$, *расстояние от* z_0 *до* z_2 *равно* $\sqrt{10}$.

Можно построить три сходящхся ряда Лорана по степеням $z-z_0$

1) *в круге* $|z-z_0|<\sqrt{10}$

2) *в кольце* $\sqrt{10}<|z-z_0|<\sqrt{13}$

3) *вне круга* $|z-z_0|>\sqrt{13}$

Разложим дробь на элементарные

$$\frac{z-1}{z(z+1)}=\frac{-1}{z-0}+\frac{2}{z+1}$$

1) $|z-z_0|<\sqrt{10}$

$$\frac{z-1}{z(z+1)}=\frac{-1}{-2-3i-0+z-(-2-3i)}+\frac{2}{-2-3i-z_2+z-(-2-3i)}=\frac{-1}{-2-3i-0}\frac{1}{1+\frac{z-(-2-3i)}{-2-3i-0}}+$$

$$+\frac{2}{-2-3i+1}\frac{1}{1+\frac{z-(-2-3i)}{-2-3i+1}}=\frac{1}{2+3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2+3i}{2+3i}\right)^n+\frac{2}{-1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2+3i}{1+3i}\right)^n$$

2) $\sqrt{10}<|z-z_0|<\sqrt{13}$

$$\frac{z-1}{z(z+1)}=\frac{-1}{-2-3i-0+z-(-2-3i)}+\frac{2}{z-(-2-3i)-2-3i+1}=\frac{-1}{-2-3i-0}\frac{1}{1+\frac{z-(-2-3i)}{-2-3i-0}}+$$

$$+\frac{2}{z-(-2-3i)}\frac{1}{1+\frac{-2-3i+1}{z-(-2-3i)}}=\frac{1}{2+3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2+3i}{2+3i}\right)^n+\frac{2}{z+2+3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+3i}{z+2+3i}\right)^n$$

3) $|z-z_0|>\sqrt{13}$

$$\frac{z-1}{z(z+1)}=\frac{-1}{z-(-2-3i)-2-3i-0}+\frac{2}{z-(-2-3i)-2-3i+1}=\frac{-1}{z-(-2-3i)}\cdot\frac{1}{1+\frac{-2-3i-0}{z-(-2-3i)}}+$$

$$+\frac{2}{z-(-2-3i)}\frac{1}{1+\frac{-2-3i+1}{z-(-2-3i)}}=\frac{-1}{z+2+3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+3i}{z+2+3i}\right)^n+\frac{2}{z+2+3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+3i}{z+2+3i}\right)^n$$

Ч _1_10_08

$z\cos\left(3z/(z-1)\right), z_0=1$

$$z\cos\frac{3z}{z-1}=z\cos\frac{3z-3+3}{z-1}=z\cos\left(3+\frac{3}{z-1}\right)=z\left(\cos 3\cos\frac{3}{z-1}-\sin 3\sin\frac{3}{z-1}\right)=$$

$$=(z-1+1)\left(\cos 3\cos\frac{3}{z-1}-\sin 3\sin\frac{3}{z-1}\right)=$$

$$=(z-1)\left(\cos 3\cos\frac{3}{z-1}-\sin 3\sin\frac{3}{z-1}\right)+\left(\cos 3\cos\frac{3}{z-1}-\sin 3\sin\frac{3}{z-1}\right)\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=}(z-1)\left(\cos 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(3/(z-1)\right)^{2n}}{(2n)!}-\sin 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(3/(z-1)\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)+\left(\cos 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(3/(z-1)\right)^{2n}}{(2n)!}-\sin 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(3/(z-1)\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=$$

$$=\left(\cos 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n}}{(z-1)^{2n-1}(2n)!}-\sin 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(z-1)^{2n}(2n+1)!}\right)+\left(\cos 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n}}{(z-1)^{2n}(2n)!}-\sin 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(z-1)^{2n+1}(2n+1)!}\right)=$$

$$=\cos 3\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n}}{(z-1)^{2n-1}(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n}}{(z-1)^{2n}(2n)!}\right)-\sin 3\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(z-1)^{2n}(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(z-1)^{2n+1}(2n+1)!}\right)$$

(*) $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!};\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

Ч _1_11_08

$$\frac{e^z-1}{\sin z-z+z^3/6}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{\sin z-z+z^3/6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{\cos z-1+z^2/2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{-\sin z+z}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{-\cos z+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{\sin z}=\infty$$

т.е. $z=0-$ *полюс*

Определим его порядок

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{\sin z-z+z^3/6}{e^z-1}=\frac{\left(z-z^3/3!+z^5/5!-\ldots\right)-z+z^3/6}{\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots\right)-1}=$$

$$=\frac{z^5/5!-\ldots}{\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots}=z^4\frac{1/5!-\ldots}{\frac{1}{1!}+\frac{z}{2!}+\ldots}$$

т.е. $z=0-$ *полюс* 4*го порядка*

$Ч\_1\_12\_08$

$\mathrm{tg}\frac{1}{z}$

$Особые\ точки: z=0\ и\ z=\frac{1}{\pi/2+\pi k}, k\in Z$

$z=0-существенно\ особая\ точка,\ потому\ что$

$\lim\limits_{z\to 0}\mathrm{tg}\frac{1}{z}-не\ существует$

$z=\frac{1}{\pi/2+\pi k}-существенно\ особые\ точки,\ потому\ что$

$\lim\limits_{z\to\frac{1}{\pi/2+\pi k}+0}\mathrm{tg}\frac{1}{z}=-\infty$

$\lim\limits_{z\to\frac{1}{\pi/2+\pi k}-0}\mathrm{tg}\frac{1}{z}=+\infty$

$Ч\_1\_13\_08$

$$\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{2z|z-1|}{\sin z}dz$$

В контур интегрирования попадают 2 *особых точеки* :

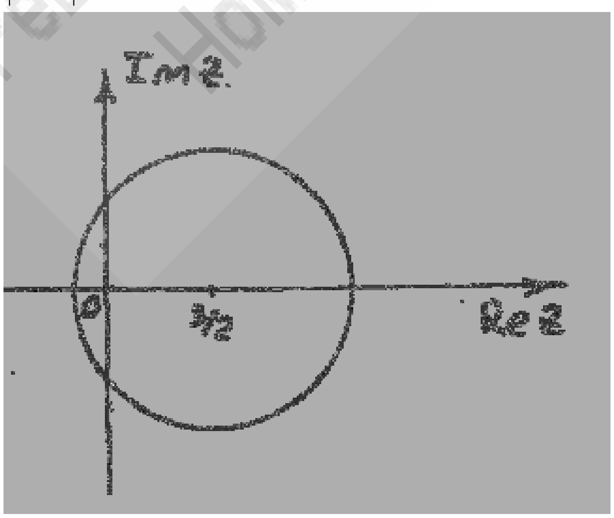
$z=0-$ *устранимая особая точка и* $z=\pi-$ *полюс* 1 *порядка*

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=0$$

$$\operatorname*{res}_{z=\pi} f(z)=\lim_{z\to\pi}\frac{2z|z-1|(z-\pi)}{\sin z}=-\lim_{z\to\pi}\frac{2z|z-1|(z-\pi)}{\sin(z-\pi)}=$$

$$=-\lim_{z\to\pi}\left(\frac{z-\pi}{\sin(z-\pi)}2z|z-1|\right)=-2\pi|\pi-1|=2\pi(1-\pi)$$

$$\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{2z|z-1|}{\sin z}dz=2\pi i\left(0+2\pi(1-\pi)\right)=4\pi^2(1-\pi)i$$



Ч _1_14_08

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{1-\sin(1/z)}{z}$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

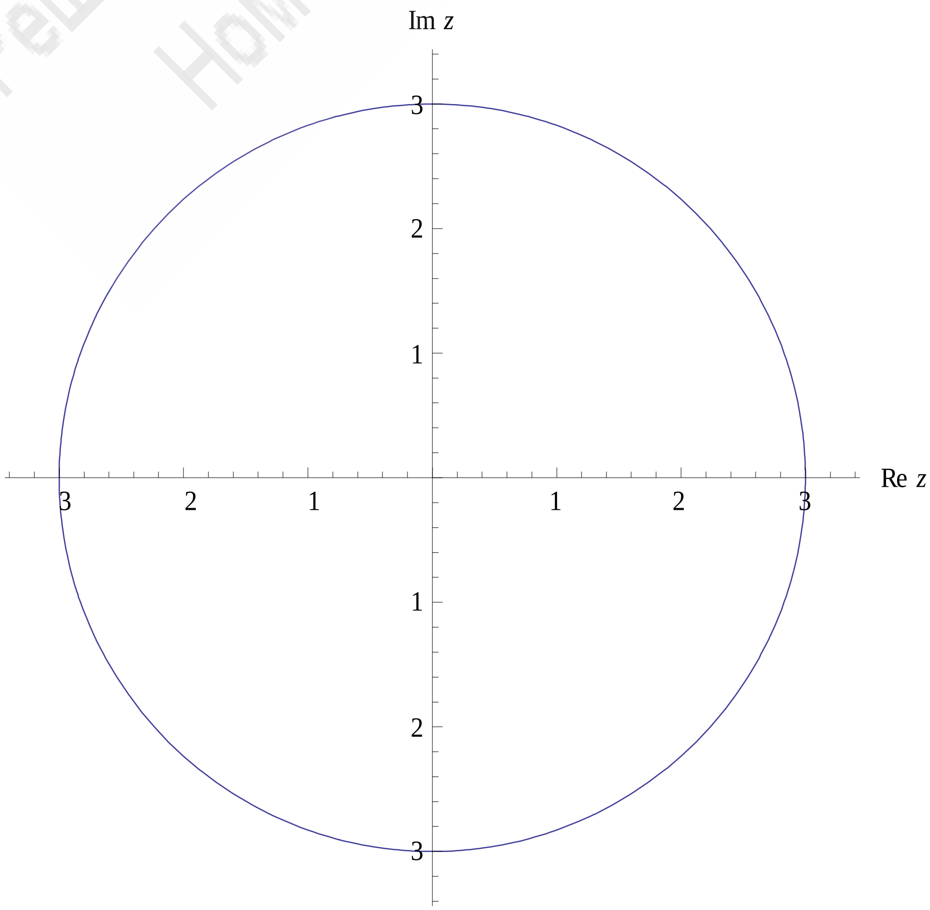
$z = 0 -$ *существенно особая точка*

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = C_{-1}$$

$$\frac{1-\sin(1/z)}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{z^{2n+1}} =$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4\cdot 3!} - \ldots \Rightarrow C_{-1} = 1$$

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{1-\sin(1/z)}{z} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i$$



$Ч\_1\_15\_08$

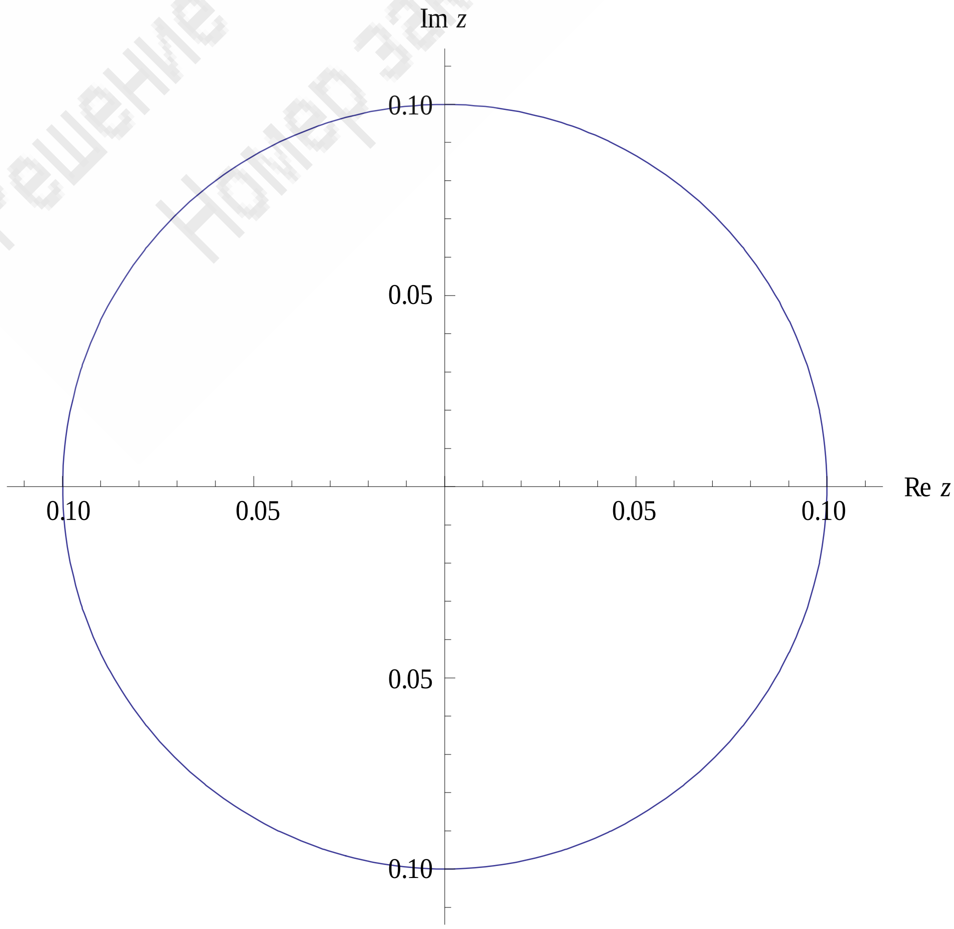
$$\oint\limits_{|z|=0,1} \frac{\operatorname{ch} z - \cos 3z}{z^2 \sin 5\pi z} dz$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

$z = 0$ – *полюс 1го порядка*

$$\oint\limits_{|z|=0,1} \frac{\operatorname{ch} z - \cos 3z}{z^2 \sin 5\pi z} dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{ch} z - \cos 3z}{z \sin 5\pi z} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to 0} \frac{\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \ldots\right) - \left(1 - \frac{9z^2}{2!} + \ldots\right)}{z \sin 5\pi z} = 2\pi i \lim_{z \to 0} \frac{5z^2}{z 5\pi z} = 2i$$



Ч _1_16_08

$$\oint\limits_{|z+4|=2}\left(z\cos\frac{1}{z+4}+\frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{(z+3)^2(z+1)}\right)\mathrm{dz}=I=I_1+I_2$$

$$I_1=\oint\limits_{|z+4|=2}z\cos\frac{1}{z+4}\mathrm{dz}$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка :

$z=-4$ – *существенно особая точка*

$$\operatorname*{res}_{z=-4}f_1(z)=C_{-1}$$

$$z\cos\frac{1}{z+4}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1^n)}{(2n)!\cdot(z+4)^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1^n)(z+4-4)}{(2n)!\cdot(z+4)^{2n}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{(z+4)^{2n-1}}-\frac{4}{(z+4)^{2n}}\right)\right)=z-\frac{1}{2(z+4)}+\frac{2}{(z+4)^2}-\ldots\Rightarrow C_{-1}=\frac{-1}{2}$$

$$I_1=2\pi i\operatorname*{res}_{z=-4}f_1(z)=2\pi i\cdot C_{-1}=-\pi i$$

$$I_2=\oint\limits_{|z+4|=2}\frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{(z+3)^2(z+1)}\mathrm{dz}$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка :

$z=-3$ – *полюс 2го порядка*

$$I_2=\oint\limits_{|z+4|=2}\frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{(z+3)^2(z+1)}\mathrm{dz}=2\pi i\operatorname*{res}_{z=-3}f_2(z)=2\pi i\lim_{z\to-3}\frac{d}{\mathrm{dz}}\frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{z+1}=$$

$$=4\pi i\lim_{z\to-3}\frac{\cos\frac{\pi z}{6}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot(z+1)-\sin\frac{\pi z}{6}}{(z+1)^2}=4\pi i\cdot\frac{1}{4}=\pi i$$

$$I=I_1+I_2=-\pi i+\pi i=0$$

$Ч\_1\_17\_08$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dt}}{8-3\sqrt{7}\sin t}$$

полагаем: $z = e^{it} \Rightarrow \sin t = \dfrac{z^2-1}{2iz}, \mathrm{dt} = \dfrac{\mathrm{dz}}{iz}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dt}}{8-3\sqrt{7}\sin t} = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{dz}/iz}{8-3\sqrt{7}\dfrac{z^2-1}{2iz}} = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{dz}}{\dfrac{-3\sqrt{7}}{2}z^2 + 8iz + \dfrac{3\sqrt{7}}{2}} =$$

$$= \frac{-2}{3\sqrt{7}} \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{dz}}{\left(z-3i/\sqrt{7}\right)\left(z-i\sqrt{7}/3\right)}$$

Особые точки подынтегральной функции:

$z = 3i/\sqrt{7}$

$z = i\sqrt{7}/3$

В контур интегрирования попадет только

$z = i\sqrt{7}/3$ – *полюс* 1*го порядка*

$$\frac{-2}{3\sqrt{7}} \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{dz}}{\left(z-3i/\sqrt{7}\right)\left(z-i\sqrt{7}/3\right)} = \frac{-2}{3\sqrt{7}} 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i\sqrt{7}/3} f(z) =$$

$$= \frac{-4\pi i}{3\sqrt{7}} \lim_{z\to i\sqrt{7}/3} \frac{1}{z-3i/\sqrt{7}} = \frac{-4\pi i}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{3i\sqrt{7}}{2} = 2\pi$$

Ч _1_18_08

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dt}}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\cos t\right)^2}$$

Полагаем: $z = e^{it} \Rightarrow \mathrm{dt} = \frac{\mathrm{dz}}{iz}, \cos t = \frac{z^2+1}{2z}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dt}}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\cos t\right)^2} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{dz}/iz}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\,\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \frac{4}{3i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{dz}}{\left(z-\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{15}}{3}\right)^2\left(z-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{15}}{3}\right)^2}$$

Особые точки подынтегральной функции:

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{15}}{3}$$

$$z_2 = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{15}}{3}$$

В контур интегрирования попадет только одна особая точка:

z_1 *– полюс 2го порядка*

$$\frac{4}{3i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{dz}/iz}{\left(z-\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{15}}{3}\right)^2\left(z-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{15}}{3}\right)^2} = \frac{4}{3i}\cdot 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{8\pi}{3}\lim_{z\to z_1}\frac{d}{\mathrm{dz}}\frac{z}{\left(z-z_2\right)^2} =$$

$$= \frac{8\pi}{3}\lim_{z\to z_1}\frac{\left(z-z_2\right)^2-2z\left(z-z_2\right)}{\left(z-z_2\right)^4} = \frac{8\pi}{3}\lim_{z\to z_1}\frac{-z-z_2}{\left(z-z_2\right)^3} = \frac{8\pi}{3}\frac{-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{15}}{3}-\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{15}}{3}}{\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{15}}{3}-\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{15}}{3}\right)^3} =$$

$$= \frac{8\pi}{3}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} = \pi\sqrt{\frac{5}{2}}$$