Ч _1_01_10

$$\sqrt[4]{\frac{1}{32}+\frac{i\sqrt{3}}{32}}$$

представим число $z=\frac{1}{32}+\frac{i\sqrt{3}}{32}$ *в тригонометрической форме*:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ где\ r=\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2};\cos\varphi=\frac{\mathrm{Re}(z)}{r};\sin\varphi=\frac{\mathrm{Im}(z)}{r}$$

$$r=\frac{1}{16}$$

$$\begin{cases}\cos\varphi=\frac{1}{2}\\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}$$

$$z=\frac{1}{16}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi(k-1)}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi(k-1)}{n}\right),k=1,2,\dots,n$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{32}+\frac{i\sqrt{3}}{32}}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),k=1$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{32}+\frac{i\sqrt{3}}{32}}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right),k=2$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{32}+\frac{i\sqrt{3}}{32}}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right),k=3$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{32}+\frac{i\sqrt{3}}{32}}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right),k=4$$

$Ч\_1\_02\_10$

$$\operatorname{sh}\left(1+\pi i/2\right)=\frac{e^{1+\pi i/2}-e^{-1-\pi i/2}}{2}=$$

$$=\frac{e\left(\cos\left(\pi/2\right)+i\sin\left(\pi/2\right)\right)-e^{-1}\left(\cos\left(-\pi/2\right)+i\sin\left(-\pi/2\right)\right)}{2}=$$

$$=\frac{e\left(\cos\left(\pi/2\right)+i\sin\left(\pi/2\right)\right)-e^{-1}\left(\cos\left(\pi/2\right)-i\sin\left(\pi/2\right)\right)}{2}=$$

$$=\frac{\left(e-e^{-1}\right)\cos\left(\pi/2\right)+i\cdot\left(e+e^{-1}\right)\sin\left(\pi/2\right)}{2}=\frac{\left(e-e^{-1}\right)\cdot 0+i\cdot\left(e+e^{-1}\right)\cdot 1}{2}=$$

$$=i\cdot\frac{\left(e+e^{-1}\right)}{2}=i\cdot\operatorname{ch}1$$

$Ч\_1\_06\_10$

$v = y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(1)=2$

$$\textit{Условия Коши – Римана}: \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{-\partial V}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 1 - \frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right) - y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 1 + \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(x,y) = \int\left(1+\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\mathrm{dx} + \varphi(y) = x + \frac{x}{x^2+y^2} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{-y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-x\cdot 2y}{x^2+y^2} + \varphi'(y) = \frac{-2xy}{x^2+y^2} + \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-\partial U}{\partial y} \Rightarrow \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\left(\frac{-2xy}{x^2+y^2} + \varphi'(y)\right) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C$$

$$U(x,y) = x + \frac{x}{x^2+y^2} + C$$

$$f(z) = U(x,y) + i\cdot V(x,y) = x + \frac{x}{x^2+y^2} + C + i\cdot\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right) = x + iy + \frac{x-iy}{x^2+y^2} + C =$$

$$= x + iy + \frac{x-iy}{x^2-i^2y^2} + C = x + iy + \frac{x-iy}{(x-iy)(x+iy)} + C = x + iy + \frac{1}{x+iy} + C = z + \frac{1}{z} + C$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow C = 0$$

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

Ч _1_07_10

$$\int\limits_{ABC} \left(z^2 + \cos z\right) \mathrm{dz}$$

$ABC: z_A = 0, z_B = 1, z_C = i$

$z = x + iy$

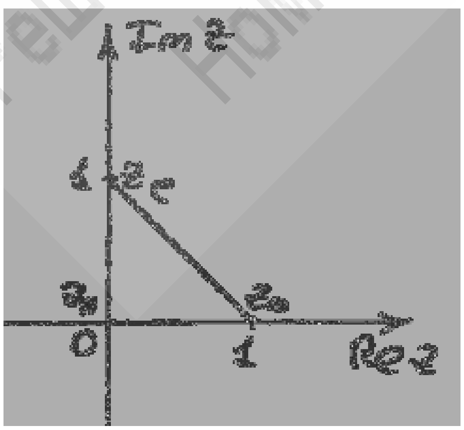
$AB: y = 0 \Rightarrow z = x, \mathrm{dz} = \mathrm{dx}$

$BC: y = 1 - x \Rightarrow z = x + i(1-x) = (1-i)x + i, \mathrm{dz} = (1-i)\mathrm{dx}$

$$\int\limits_{ABC} \left(z^2 + \cos z\right) \mathrm{dz} = \int_0^1 \left(x^2 + \cos x\right)\mathrm{dx} + (1-i)\int_1^0 \left(\left((1-i)x+i\right)^2 + \cos\left((1-i)x+i\right)\right)\mathrm{dx} =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \sin x\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{\left((1-i)x+i\right)^3}{3} + \sin\left((1-i)x+i\right)\right)\Bigg|_1^0 =$$

$$= \frac{1}{3} + \sin 1 + \frac{-1}{3} - \frac{i}{3} - \sin 1 + i\,\mathrm{sh}1 = i\,\mathrm{sh}1 - \frac{i}{3}$$



Ч _1_08_10

$$\frac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}$$

Знаменатель данной функции обращается в нуль при $z_1=0, z_2=5, z_3=-10$

$$f(z)=\frac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}=\frac{5z-100}{z^2(z-5)(z+10)}$$

С центром в точке $z=0$ *можно построить три области, в которых данная функция аналитична* $: 0<|z|<5, 5<|z|<10, |z|>10$

Разложим дробь на элементарные

$$\frac{5z-100}{z^2(z-5)(z+10)}=\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}+\frac{w}{z-5}+\frac{s}{z+10}=$$

$$=\frac{az(z-5)(z+10)+b(z-5)(z+10)+wz^2(z+10)+sz^2(z-5)}{z^2(z-5)(z+10)}$$

$$az(z-5)(z+10)+b(z-5)(z+10)+wz^2(z+10)+sz^2(z-5)=5z-100\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z=0:-50b=-100\\ z=5:375w=-75\\ z=-10:-1500=-150s\\ z=1:-44a-44b-4s+11w=-95\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2\\ w=-1/5\\ s=1/10\\ a=1/10\end{cases}$$

$$\frac{5z-100}{z^2(z-5)(z+10)}=\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-5}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z+10}$$

$1)0<|z|<5$

$$\frac{5z-100}{z^2(z-5)(z+10)}=\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-5}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z+10}=\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{1-z/5}+\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{1+z/10}=$$

$$=\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{25}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n+\frac{1}{100}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{10}\right)^n=\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^n}{10^{n+2}}=$$

$$=\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}+(-1)^n}{10^{n+2}}z^n$$

$2)5<|z|<10$

$$\frac{5z-100}{z^2(z-5)(z+10)}=\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-5}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z+10}=\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{5z}\cdot\frac{1}{1-5/z}+\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{1+z/10}=$$

$$=\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{z}\right)^n+\frac{1}{100}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{10}\right)^n=\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{10^{n+2}}$$

$3)|z|>10$

$$\frac{5z-100}{z^2(z-5)(z+10)}=\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-5}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z+10}=\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{5z}\cdot\frac{1}{1-5/z}+\frac{1}{10z}\cdot\frac{1}{1+10/z}=$$

$$=\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{5z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{z}\right)^n+\frac{1}{10z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-10}{z}\right)^n=\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n10^{n-1}-5^{n-1}}{z^{n+1}}$$

$Ч\_1\_09\_10$

$$\frac{z+3}{z^2-1}, z_0 = 3-i$$

Фунция имеет две особые точки : $z_1 = -1, z_2 = 1$, *а центр разложения находится* z_0. *Расстояние от* z_0 *до* z_1 *равно* $\sqrt{17}$, *расстояние от* z_0 *до* z_2 *равно* $\sqrt{5}$.

Можно построить три сходящцхся ряда Лорана по степеням $z - z_0$

1) *в круге* $|z - z_0| < \sqrt{5}$

2) *в кольце* $\sqrt{5} < |z - z_0| < \sqrt{17}$

3) *вне круга* $|z - z_0| > \sqrt{17}$

Разложим дробь на элементарные

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \frac{-1}{z+1} + \frac{2}{z-1}$$

1) $|z - z_0| < \sqrt{5}$

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \frac{-1}{3-i-(-1)+z-(3-i)} + \frac{2}{3-i-1+z-(3-i)} = \frac{-1}{3-i-(-1)} \frac{1}{1+\dfrac{z-(3-i)}{3-i-(-1)}} +$$

$$+\frac{2}{3-i-1} \frac{1}{1+\dfrac{z-(3-i)}{3-i-1}} = \frac{-1}{4-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-3+i}{4-i}\right)^n + \frac{2}{2-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-3+i}{2-i}\right)^n$$

2) $\sqrt{5} < |z - z_0| < \sqrt{17}$

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \frac{-1}{3-i-(-1)+z-(3-i)} + \frac{2}{z-(3-i)+3-i-1} = \frac{-1}{3-i-(-1)} \frac{1}{1+\dfrac{z-(3-i)}{3-i-(-1)}} +$$

$$+\frac{2}{z-(3-i)} \frac{1}{1+\dfrac{3-i-1}{z-(3-i)}} = \frac{-1}{4-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-3+i}{4-i}\right)^n + \frac{2}{z-3+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i-2}{z-3+i}\right)^n$$

3) $|z - z_0| > \sqrt{17}$

$$\frac{z+3}{z^2-1} = \frac{-1}{z-(3-i)+3-i-(-1)} + \frac{2}{z-(3-i)+3-i-1} = \frac{-1}{z-(3-i)} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{3-i-(-1)}{z-(3-i)}} +$$

$$+\frac{2}{z-(3-i)} \frac{1}{1+\dfrac{3-i-1}{z-(3-i)}} = \frac{-1}{z-3+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i-4}{z-3+i}\right)^n + \frac{2}{z-3+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i-2}{z-3+i}\right)^n$$

$Ч\_1\_10\_10$

$$(z-3)\cos\pi\frac{z-3}{z},\ z_0=0$$

$$(z-3)\cos\pi\frac{z-3}{z}=(z-3)\cos\pi\left(1-\frac{3}{z}\right)=(z-3)\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{z}\right)=$$

$$=-(z-3)\cos\frac{3\pi}{z}\overset{(*)}{=}-(z-3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{3\pi}{z}\right)^{2n}}{(2n)!}=$$

$$=-(z-3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3\pi)^{2n}}{z^{2n}(2n)!}=-z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3\pi)^{2n}}{z^{2n}(2n)!}+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3\pi)^{2n}}{z^{2n}(2n)!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(3\pi)^{2n}}{z^{2n-1}(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1}\pi^{2n}}{z^{2n}(2n)!}$$

$$(*)\quad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Ч _1_11_10

$$\frac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6} = \lim_{z\to 0}\frac{\left(1 - z^4/2! + \ldots\right) - 1}{\left(z + z^3/3! + z^5/5! + \ldots\right) - z - z^3/6} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{-z^4/2! + \ldots}{z^5/5! + \ldots} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{-1/2! + \ldots}{1/5! + \ldots}\right) = \infty$$

т.е. $z = 0$ – *полюс* 1*го порядка*

Ч _1_12_10

$$\frac{1}{e^z+1}$$

Особые точки : $z=\pi i+2\pi k$, *т.к.* $e^{\pi i+2\pi k}=-1\,(k\in Z)$

Определим тип особых точек

$$\lim_{z\to\pi i}\frac{1}{e^z+1}=\infty\Rightarrow \text{это полюса.}$$

Определим их порядок

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=e^z+1=e^{z-\pi i+\pi i}+1=-e^{z-\pi i}=-\left(1+(z-\pi i)+\frac{(z-\pi i)^2}{2!}+\ldots\right)+1=$$

$$=-(z-\pi i)-\frac{(z-\pi i)^2}{2!}-\ldots=-(z-\pi i)\left(1+\frac{(z-\pi i)}{2!}+\ldots\right)$$

т.е. $z=\pi i+2\pi k$ – *полюса* 1*го порядка*

Ч _1_13_10

$$\oint\limits_{|z-1/2|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z}\,\mathrm{dz}$$

В контур интегрирования попадают две особых точки:

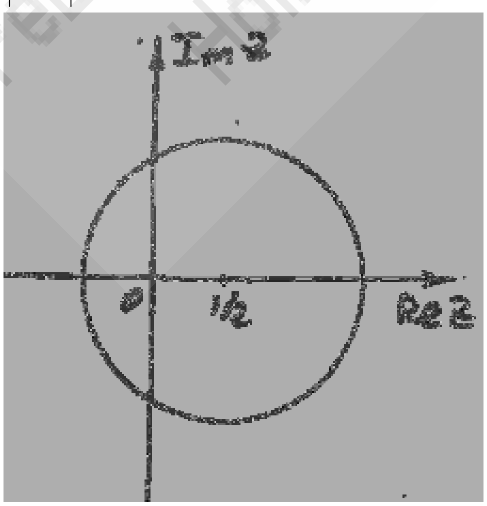
$z=0-$ *устранимая особая точка и* $z=1-$ *полюс 1го порядка*

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=0$$

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to1}\frac{iz(z-i)(z-1)}{\sin \pi z}=\lim_{z\to1}\frac{iz(z-i)(z-1)}{-\sin(\pi(z-1))}=$$

$$=\frac{-i}{\pi}\lim_{z\to1}\frac{\pi(z-1)}{\sin(\pi(z-1))}z(z-i)=\frac{-i(1-i)}{\pi}=\frac{-1-i}{\pi}$$

$$\oint\limits_{|z-1/2|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z}\,\mathrm{dz}=2\pi i\cdot\frac{-1-i}{\pi}=2-2i$$



Ч _1_14_10

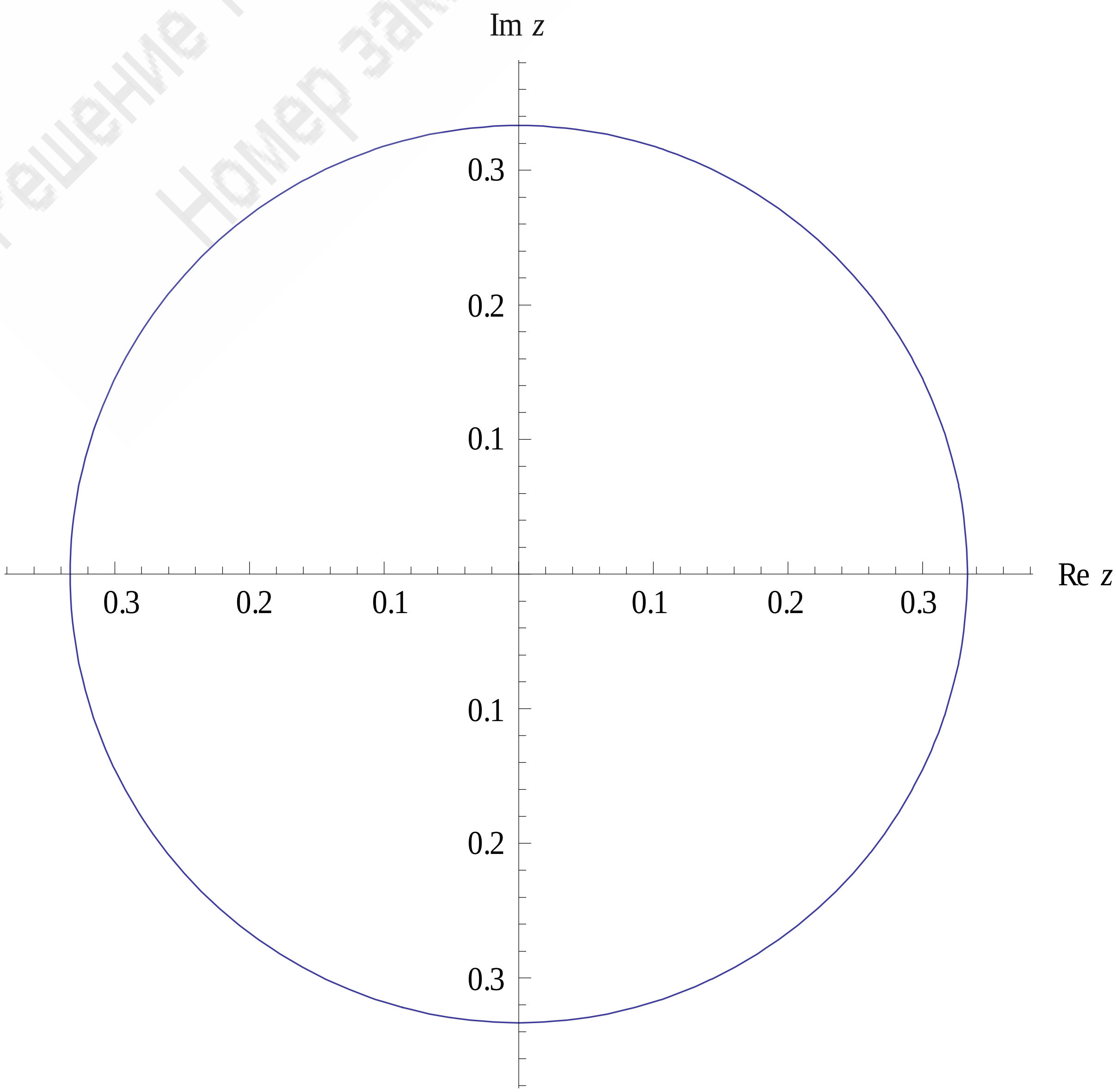
$$\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{4z^4-2z+3}{z^3}\,\mathrm{dz}$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка :

$z = 0$ – *полюс 3го порядка*

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{\mathrm{dz}^2}\left(4z^4-2z+3\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{\mathrm{dz}}\left(16z^3-2\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(48z^2\right) = 0$$

$$\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{4z^4-2z+3}{z^3}\,\mathrm{dz} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f\left(z\right) = 2\pi i\cdot 0 = 0$$



Ч _1_15_10

$$\oint\limits_{|z|=0,05} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^3\,\mathrm{sh}16\pi z}\,\mathrm{dz}$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка :

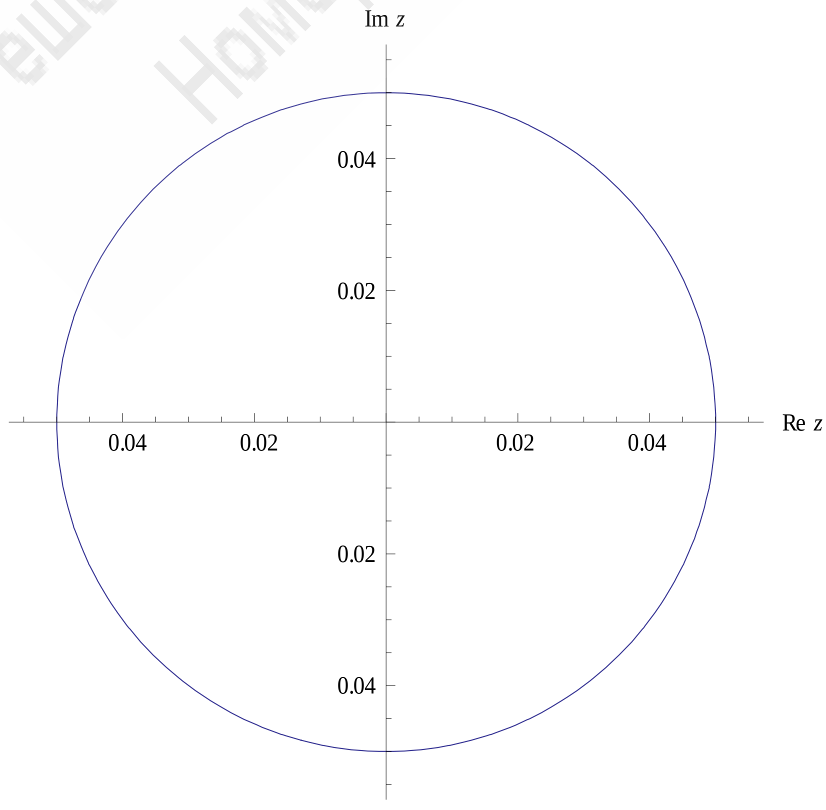
$z=0$ – *полюс* 2*го порядка*

$$\oint\limits_{|z|=0,05} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^3\,\mathrm{sh}16\pi z}\,\mathrm{dz} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{d}{\mathrm{dz}}\left(\frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z\,\mathrm{sh}16\pi z}\right) =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{d}{\mathrm{dz}}\frac{\left(4e^{4z}-4\cos 4z\right)z\,\mathrm{sh}16\pi z-\left(e^{4z}-1-\sin 4z\right)\cdot\left(\mathrm{sh}16\pi z+z\cdot 16\pi\,\mathrm{ch}16\pi z\right)}{\left(z\,\mathrm{sh}16\pi z\right)^2} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{d}{\mathrm{dz}}\frac{4\left(e^{4z}-\cos 4z\right)z\,\mathrm{sh}16\pi z-\left(e^{4z}-1-\sin 4z\right)\cdot\left(\mathrm{sh}16\pi z+z\cdot 16\pi\,\mathrm{ch}16\pi z\right)}{\left(z\,\mathrm{sh}16\pi z\right)^2} =$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{4}{3\pi} = \frac{8i}{3}$$



Ч _1_16_10

$$\oint\limits_{|z+5|=2}\left(z\sin\frac{1}{z+5}+\frac{2\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi iz}{4}}{(z+4)^2(z+2)}\right)\mathrm{dz}=I=I_1+I_2$$

$$I_1=\oint\limits_{|z+5|=2} z\sin\frac{1}{z+5}\,\mathrm{dz}$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

$z=-5$ – *существенно особая точка*

$$\operatorname*{res}_{z=-5} f_1(z)=C_{-1}$$

$$z\sin\frac{1}{z+5}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot(z+5)^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+5-5)}{(2n+1)!\cdot(z+5)^{2n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{(z+5)^{2n}}-\frac{5}{(z+5)^{2n+1}}\right)=1-\frac{5}{z+5}-\frac{1}{6(z+5)^2}+\ldots\Rightarrow C_{-1}=-5$$

$$I_1=2\pi i\operatorname*{res}_{z=-5} f_1(z)=2\pi i\cdot C_{-1}=-10\pi i$$

$$I_2=\oint\limits_{|z+5|=2}\frac{2\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi iz}{4}}{(z+4)^2(z+2)}\,\mathrm{dz}$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

$z=-4$ – *полюс 2го порядка*

$$I_2=\oint\limits_{|z+5|=2}\frac{2\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi iz}{4}}{(z+4)^2(z+2)}\,\mathrm{dz}=2\pi i\operatorname*{res}_{z=-4} f_2(z)=2\pi i\lim_{z\to-4}\frac{d}{\mathrm{dz}}\frac{2\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi iz}{4}}{z+2}=$$

$$=4\pi i\lim_{z\to-4}\frac{\mathrm{sh}\,\frac{\pi iz}{4}\cdot\frac{\pi i}{4}\cdot(z+2)-\mathrm{ch}\,\frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2}=4\pi i\cdot\frac{1}{4}=\pi i$$

$$I=I_1+I_2=-10\pi i+\pi i=-9\pi i$$

$Ч\_1\_17\_10$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t}$$

полагаем: $z=e^{it}\Rightarrow \sin t=\frac{z^2-1}{2iz}, dt=\frac{dz}{iz}$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{4-\sqrt{7}\frac{z^2-1}{2iz}}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\frac{-\sqrt{7}}{2}z^2+4iz+\frac{\sqrt{7}}{2}}=$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{7}}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z-i/\sqrt{7}\right)\left(z-\sqrt{7}i\right)}$$

Особые точки подынтегральной функции:

$z=i/\sqrt{7}$

$z=\sqrt{7}i$

В контур интегрирования попадет только

$z=i/\sqrt{7}$ – *полюс 1го порядка*

$$\frac{-2}{\sqrt{7}}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z-i/\sqrt{7}\right)\left(z-\sqrt{7}i\right)}=\frac{-2}{\sqrt{7}}2\pi i\underset{z=i/\sqrt{7}}{\operatorname{res}}f(z)=$$

$$=\frac{-4\pi i}{\sqrt{7}}\lim_{z\to i/\sqrt{7}}\frac{1}{z-\sqrt{7}i}=\frac{-4\pi i}{\sqrt{7}}\cdot\frac{-i\sqrt{7}}{6}=\frac{2\pi}{3}$$

Ч _1_18_10

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dt}}{\left(4+\sqrt{7}\cos t\right)^2}$$

Полагаем : $z = e^{it} \Rightarrow \mathrm{dt} = \frac{\mathrm{dz}}{iz}, \cos t = \frac{z^2+1}{2z}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dt}}{\left(4+\sqrt{7}\cos t\right)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{dz}/iz}{\left(4+\sqrt{7}\,\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \frac{4}{7i}\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{dz}}{\left(z+1/\sqrt{7}\right)^2\left(z+\sqrt{7}\right)^2}$$

Особые точки подынтегральной функции :

$z_1 = -1/\sqrt{7}$

$z_2 = -\sqrt{7}$

В контур интегрирования попадет только одна особая точка :

z_1 – *полюс 2го порядка*

$$\frac{4}{7i}\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{dz}/iz}{\left(z+1/\sqrt{7}\right)^2\left(z+\sqrt{7}\right)^2} = \frac{4}{7i}\cdot 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{8\pi}{7}\lim_{z\to z_1}\frac{d}{\mathrm{dz}}\frac{z}{\left(z-z_2\right)^2} =$$

$$= \frac{8\pi}{7}\lim_{z\to z_1}\frac{\left(z-z_2\right)^2 - 2z\left(z-z_2\right)}{\left(z-z_2\right)^4} = \frac{8\pi}{7}\lim_{z\to z_1}\frac{-z-z_2}{\left(z-z_2\right)^3} =$$

$$= \frac{8\pi}{7}\frac{-\left(-1/\sqrt{7}\right)-\left(-\sqrt{7}\right)}{\left(-1/\sqrt{7}-\left(-\sqrt{7}\right)\right)^3} = \frac{8\pi}{7}\cdot\frac{7}{27} = \frac{8\pi}{27}$$