$Ч\_1\_08\_03$

$$\frac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$$

Знаменатель данной функции обращается в нуль при $z_1=0, z_2=-3, z_3=3/2$

$$f(z)=\frac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}=\frac{3z-18}{2(z-1{,}5)(z+3)}$$

С центром в точке $z=0$ *можно построить три области, в которых данная функция аналитична* : $0<|z|<3/2, 3/2<|z|<3, |z|>3$

Разложим дробь на элементарные

$$\frac{3z-18}{2(z-1{,}5)(z+3)}=\frac{a}{z}+\frac{b}{2z-3}+\frac{s}{z+3}=\frac{a(2z-3)(z+3)+bz(z+3)+sz(2z-3)}{z(2z-3)(z+3)}$$

$$a(2z-3)(z+3)+bz(z+3)+sz(2z-3)=3z-18\Rightarrow\begin{cases}z=0:-9a=-18\\ z=3/2:27b/4=-27/2\\ z=-3:27s=-27\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ s=-1\\ b=-2\end{cases}$$

$$\frac{3z-18}{2(z-1{,}5)(z+3)}=\frac{2}{z}-\frac{2}{2z-3}-\frac{1}{z+3}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z-3/2}-\frac{1}{z+3}$$

1) $0<|z|<3/2$

$$\frac{3z-18}{2(z-1{,}5)(z+3)}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z-3/2}-\frac{1}{z+3}=\frac{2}{z}+\frac{1}{3/2}\frac{1}{1-z/(3/2)}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+z/3}=$$

$$=\frac{2}{z}+\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2z}{3}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{3}\right)^n=\frac{2}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}z^n+(-1)^{n+1}z^n}{3^{n+1}}$$

2) $3/2<|z|<3$

$$\frac{3z-18}{2(z-1{,}5)(z+3)}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z-3/2}-\frac{1}{z+3}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-3/(2z)}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+z/3}=$$

$$=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2z}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{3}\right)^n$$

3) $|z|>3$

$$\frac{3z-18}{2(z-1{,}5)(z+3)}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z-3/2}-\frac{1}{z+3}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-3/(2z)}-\frac{1}{z}\frac{1}{1+3/z}=$$

$$=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-3}{z}\right)^n=\frac{2}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3/2)^n\left(1+(-2)^n\right)}{z^{n+1}}$$

Ч _1_09_03

$$\frac{z+1}{z(z-1)},\ z_0=-3-2i$$

Фунция имеет две особые точки : $z_1=1, z_2=0$, *а центр разложения находится* z_0. *Расстояние от* z_0 *до* z_1 *равно* $2\sqrt{5}$, *расстояние от* z_0 *до* z_2 *равно* $\sqrt{13}$.

Можно построить три сходящхся ряда Лорана по степеням $z-z_0$

1) *в круге* $|z-z_0|<\sqrt{13}$

2) *в кольце* $\sqrt{13}<|z-z_0|<2\sqrt{5}$

3) *вне круга* $|z-z_0|>2\sqrt{5}$

Разложим дробь на элементарные

$$\frac{z+1}{z(z-1)}=\frac{2}{z-1}+\frac{-1}{z-0}$$

1) $|z-z_0|<\sqrt{13}$

$$\frac{z+1}{z(z-1)}=\frac{2}{-3-2i-1+z-(-3-2i)}+\frac{-1}{-3-2i-0+z-(-3-2i)}=\frac{2}{-3-2i-1}\frac{1}{1+\frac{z-(-3-2i)}{-3-2i-1}}+$$

$$+\frac{-1}{-3-2i-0}\frac{1}{1+\frac{z-(-3-2i)}{-3-2i-0}}=\frac{1}{-2-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+3+2i}{4+2i}\right)^n+\frac{1}{3+2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+3+2i}{3+2i}\right)^n$$

2) $\sqrt{13}<|z-z_0|<2\sqrt{5}$

$$\frac{z+1}{z(z-1)}=\frac{2}{-3-2i-1+z-(-3-2i)}+\frac{-1}{z-(-3-2i)-3-2i-0}=\frac{2}{-3-2i-1}\frac{1}{1+\frac{z-(-3-2i)}{-3-2i-1}}+$$

$$+\frac{-1}{z-(-3-2i)}\frac{1}{1+\frac{-3-2i-0}{z-(-3-2i)}}=\frac{1}{-2-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+3+2i}{4+2i}\right)^n+\frac{-1}{z+3+2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+2i}{z+3+2i}\right)^n$$

3) $|z-z_0|>2\sqrt{5}$

$$\frac{z+1}{z(z-1)}=\frac{2}{z-(-3-2i)-3-2i-1}+\frac{-1}{z-(-3-2i)-3-2i-0}=\frac{2}{z-(-3-2i)}\cdot\frac{1}{1+\frac{-3-2i-1}{z-(-3-2i)}}+$$

$$+\frac{-1}{z-(-3-2i)}\frac{1}{1+\frac{-3-2i-0}{z-(-3-2i)}}=\frac{2}{z+3+2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4+2i}{z+3+2i}\right)^n+\frac{-1}{z+3+2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+2i}{z+3+2i}\right)^n$$

$Ч\_1\_13\_03$

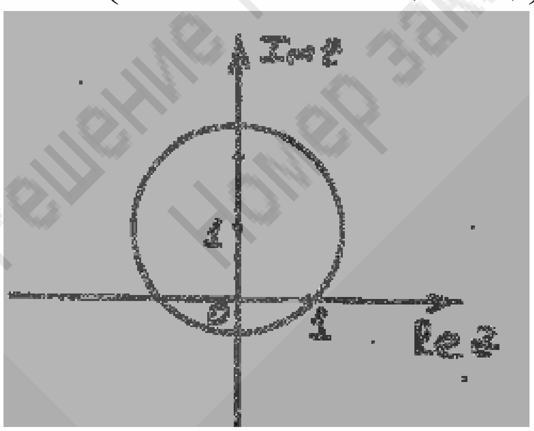
$$\oint\limits_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z\left(z^2+4\right)}$$

В контур интегрирования попадают две особые точки:

$z=0$ *и* $z=2i$ – *полюса 1го порядка, поэтому*

$$\oint\limits_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z\left(z^2+4\right)} = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=0}\frac{1}{z\left(z^2+4\right)} + \operatorname*{res}_{z=2i}\frac{1}{z\left(z^2+4\right)}\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\lim_{z\to 0}\frac{1}{z^2+4} + \lim_{z\to 2i}\frac{1}{z\left(z+2i\right)}\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi i}{4}$$



Ч _1_14_03

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{1/z}+1}{z}\,\mathrm{dz}$$

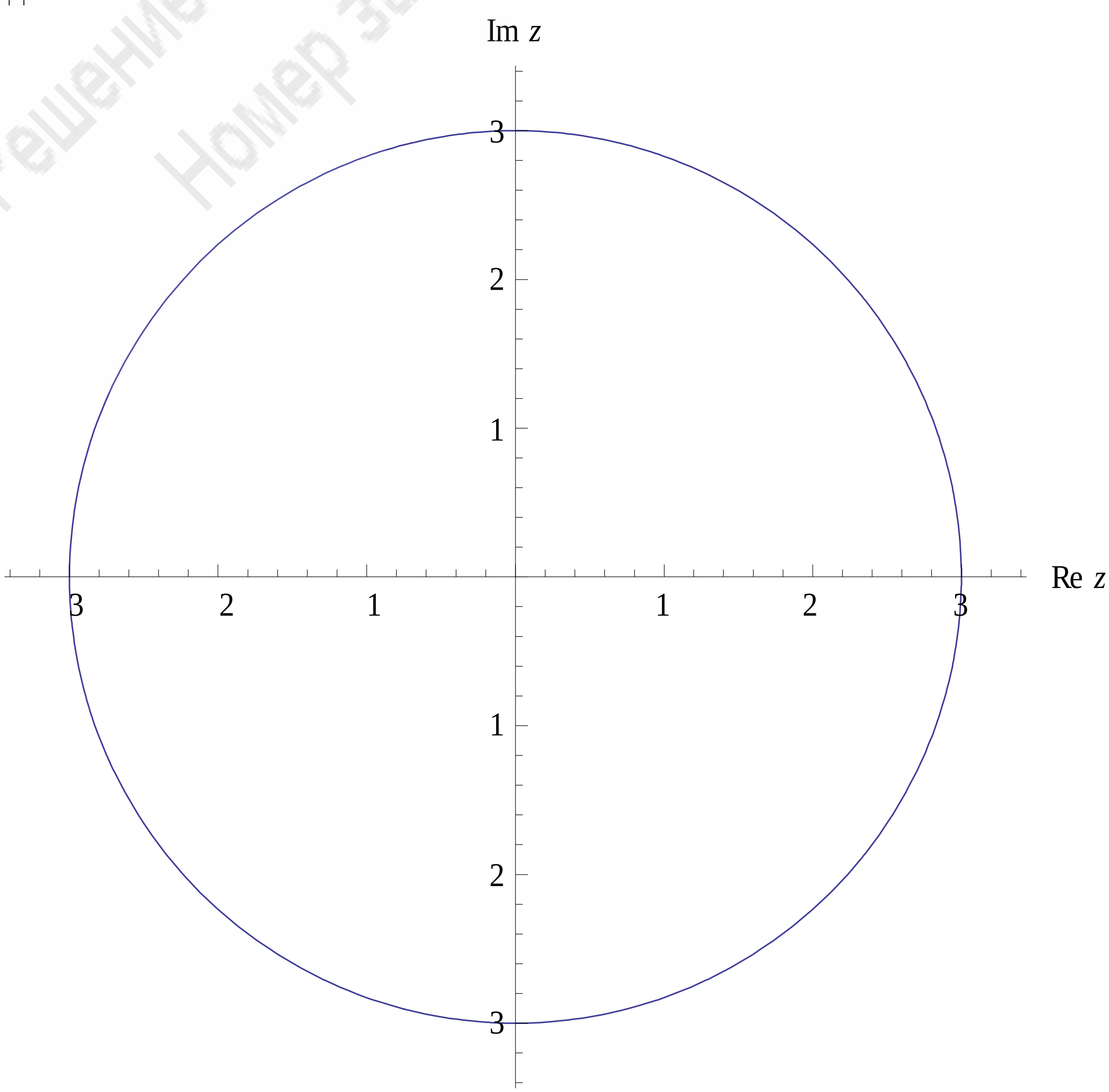
В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

$z = 0$ – *существенно особая точка*

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = C_{-1}$$

$$\frac{e^{1/z}+1}{z} = \frac{1}{z}\left(e^{z}+1\right) = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n}\cdot n!}+1\right) = \frac{2}{z}+\frac{1}{z^{2}}+\frac{1}{z^{3}\cdot 2!} \Rightarrow C_{-1} = 2$$

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{1/z}+1}{z}\,\mathrm{dz} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i\cdot(2) = 4\pi i$$



$Ч\_1\_15\_03$

$$\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{\operatorname{sh} 2\pi z - 2\pi z}{z^2 \sin^2 \dfrac{\pi^2 z}{3}} dz$$

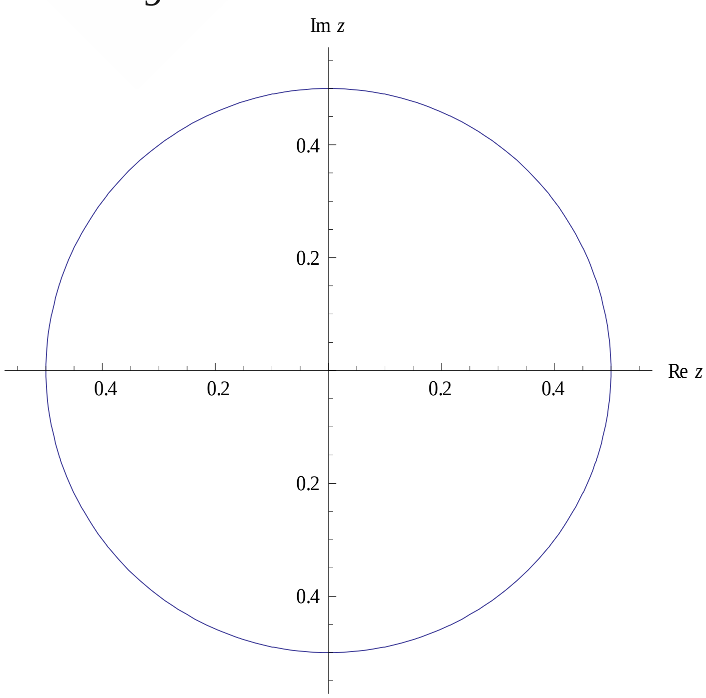
В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

$z = 0 -$ *полюс 1го порядка*

$$\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{\operatorname{sh} 2\pi z - 2\pi z}{z^2 \sin^2 \dfrac{\pi^2 z}{3}} dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sh} 2\pi z - 2\pi z}{z \sin^2 \dfrac{\pi^2 z}{3}} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\left(2\pi z + \dfrac{(2\pi z)^3}{3!} + \ldots\right) - 2\pi z}{z \sin^2 \dfrac{\pi^2 z}{3}} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\dfrac{(2\pi z)^3}{3!} + \ldots}{z\left(\dfrac{\pi^2 z}{3}\right)^2} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{\dfrac{8\pi^3}{6}}{\dfrac{\pi^4}{9}} = 2\pi i \cdot \frac{12}{\pi} = 24i$$



$Ч\_1\_16\_03$

$$\oint\limits_{|z-i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}-\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)^2(z-4-i)}\right)\mathrm{dz}=I=I_1-I_2$$

$$I_1=\oint\limits_{|z-i|=3}\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}\mathrm{dz}$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

$z=i-$ *полюс* 1*го порядка*

$$I_1=\oint\limits_{|z-i|=3}\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}\mathrm{dz}=2\pi i\operatorname*{res}_{z=i}f_1(z)=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{\pi(z+i)}{e^{\pi z/2}-i}=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{\pi}{e^{\pi z/2}\cdot\pi/2}=4\pi$$

$$I_2=\oint\limits_{|z-i|=3}\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)^2(z-4-i)}\mathrm{dz}$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

$z=2+i-$ *полюс* 2*го порядка*

$$I_1=\oint\limits_{|z-i|=3}\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)^2(z-4-i)}\mathrm{dz}=2\pi i\operatorname*{res}_{z=2+i}f_2(z)=2\pi i\lim_{z\to 2+i}\frac{d}{\mathrm{dz}}\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4+2i}}{z-4-i}=$$

$$=4\pi i\lim_{z\to 2+i}\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{4+2i}\cdot\frac{\pi i}{4+2i}\cdot(z-4-i)-\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4+2i}\cdot 1}{(z-4-i)^2}=4\pi i\cdot\frac{9i}{4}=\pi$$

$$I=I_1-I_2=4\pi-\pi=3\pi$$