Ч _1_03_04

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)\overset{(**)}{=}\frac{-i}{2}\ln\frac{1+i\dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{3}}{1-i\dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{3}}=\frac{-i}{2}\ln\frac{3+i\left(-2\sqrt{3}+3i\right)}{3-i\left(-2\sqrt{3}+3i\right)}=\frac{-i}{2}\ln\frac{-2i\sqrt{3}}{6+i2\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{-i}{2}\ln\frac{-2i\sqrt{3}\left(6-i2\sqrt{3}\right)}{\left(6+i2\sqrt{3}\right)\left(6-i2\sqrt{3}\right)}=\frac{-i}{2}\ln\frac{-12-i12\sqrt{3}}{6^2+4\cdot 3}=\frac{-i}{2}\ln\frac{-1-i\sqrt{3}}{4}\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=}\frac{-i}{2}\left(\ln\frac{1}{2}+i\left(\frac{-2\pi}{3}+2\pi k\right)\right)=\frac{-i}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{i^2}{2}\left(\frac{-2\pi}{3}+2\pi k\right)=i\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$$

(*)

$$\ln z=\ln|z|+i\left(\arg z+2\pi k\right), k\in Z$$

$$\left|\frac{-1-i\sqrt{3}}{4}\right|=\sqrt{\left(\frac{-1}{4}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

$$\arg\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{4}\right)=-\frac{2\pi}{3}$$

(**)

$$\operatorname{arctg} z=\frac{-i}{2}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$$

$Ч\_1\_05\_04$

$z = 4\,\mathrm{tg}\,t - i \cdot 3\sec t$

$$z = x(t) + i \cdot y(t) \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 4\,\mathrm{tg}\,t \\ y(t) = -3\sec t = \dfrac{-3}{\cos t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4\,\mathrm{tg}\,t \\ y = \dfrac{-3}{\cos t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{4} = \mathrm{tg}\,t \\ \dfrac{y}{3} = \dfrac{-1}{\cos t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{16} = \mathrm{tg}^2\,t \\ \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\,t = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$1 + \frac{x^2}{16} = \frac{y^2}{9}$$

$\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1 -$ *уравнение гиперболы*

$Ч\_1\_06\_04$

$u = x^2 - y^2 - 2y,\ f(0) = 0$

$$Условия\ Коши - Римана: \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{-\partial V}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow V(x, y) = \int 2x\,\mathrm{dy} + \varphi(x) = 2xy + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2y - 2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2y + \varphi'(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-\partial V}{\partial x} \Rightarrow 2y + \varphi'(x) = 2y + 2 \Rightarrow \varphi'(x) = 2 \Rightarrow \varphi(x) = 2x + C$$

$$f(z) = U(x, y) + i \cdot V(x, y) = x^2 - y^2 - 2y + i(2xy + 2x + C) =$$
$$= x^2 - y^2 - 2y + 2ixy + 2ix + iC = x^2 + 2ixy + i^2 \cdot y^2 + 2yi^2 + 2ix + iC =$$
$$= (x + iy)^2 + 2i(x + iy) + iC = z^2 + 2iz + iC$$
$$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$f(z) = z^2 + 2iz$$

$Ч\_1\_09\_04$

$$\frac{z+1}{z(z-1)},\ z_0=-2+i$$

Фунция имеет две особые точки $: z_1=1, z_2=0,$ *а центр разложения находится* z_0*. Расстояние от* z_0 *до* z_1 *равно* $\sqrt{10}$*, расстояние от* z_0 *до* z_2 *равно* $\sqrt{5}$*.*

Можно построить три сходящхся ряда Лорана по степеням $z-z_0$

1) *в круге* $|z-z_0|<\sqrt{5}$

2) *в кольце* $\sqrt{5}<|z-z_0|<\sqrt{10}$

3) *вне круга* $|z-z_0|>\sqrt{10}$

Разложим дробь на элементарные

$$\frac{z+1}{z(z-1)}=\frac{2}{z-1}+\frac{-1}{z-0}$$

1) $|z-z_0|<\sqrt{5}$

$$\frac{z+1}{z(z-1)}=\frac{2}{-2+i-1+z-(-2+i)}+\frac{-1}{-2+i-0+z-(-2+i)}=\frac{2}{-2+i-1}\frac{1}{1+\dfrac{z-(-2+i)}{-2+i-1}}+$$

$$+\frac{-1}{-2+i-0}\frac{1}{1+\dfrac{z-(-2+i)}{-2+i-0}}=\frac{2}{-3+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z+2-i}{-3+i}\right)^n+\frac{-1}{-2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z+2-i}{-2+i}\right)^n$$

2) $\sqrt{5}<|z-z_0|<\sqrt{10}$

$$\frac{z+1}{z(z-1)}=\frac{2}{-2+i_0-1+z-(-2+i)}+\frac{-1}{z-(-2+i)-2+i-0}=\frac{2}{-2+i-1}\frac{1}{1+\dfrac{z-(-2+i)}{-2+i-1}}+$$

$$+\frac{-1}{z-(-2+i)}\frac{1}{1+\dfrac{-2+i-0}{z-(-2+i)}}=\frac{2}{-3+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z+2-i}{-3+i}\right)^n+\frac{-1}{z+2-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{-2+i}{z+2-i}\right)^n$$

3) $|z-z_0|>\sqrt{10}$

$$\frac{z+1}{z(z-1)}=\frac{2}{z-(-2+i)-2+i-1}+\frac{-1}{z-(-2+i)-2+i-0}=\frac{2}{z-(-2+i)}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{-2+i-1}{z-(-2+i)}}+$$

$$+\frac{-1}{z-(-2+i)}\frac{1}{1+\dfrac{-2+i-0}{z-(-2+i)}}=\frac{2}{z+2-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{-3+i}{z+2-i}\right)^n+\frac{-1}{z+2-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{-2+i}{z+2-i}\right)^n$$

$Ч\_1\_10\_04$

$$\sin\frac{2z-7}{z+2},\ z_0=-2$$

$$\sin\frac{2z-7}{z+2}=\sin\frac{2(z+2)-11}{z+2}=\sin\left(2-\frac{11}{z+2}\right)=$$

$$=\sin 2\cos\frac{11}{z+2}-\cos 2\cdot\sin\frac{11}{z+2}\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=}\sin 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{11}{z+2}\right)^{2n}}{(2n)!}-\cos 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{11}{z+2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=$$

$$=\sin 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 11^{2n}}{(z+2)^{2n}\cdot(2n)!}-\cos 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 11^{2n+1}}{(z+2)^{2n+1}(2n+1)!}$$

(*)

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$Ч\_1\_11\_04$

$$\frac{\cos 7z-1}{\operatorname{sh} z-z-z^3/6}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos 7z-1}{\operatorname{sh} z-z-z^3/6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{-7\sin 7z}{\operatorname{ch} z-1-z^2/2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{-49\cos 7z}{\operatorname{sh} z-z}=-\infty$$

т.е. $z=0$ *– полюс*

Определим его порядок

$$\varphi(z)=\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{\operatorname{sh} z-z-z^3/6}{\cos 7z-1}=\frac{\left(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}\ldots\right)-z-z^3/6}{\left(1-\frac{(7z)^2}{2!}+\frac{(7z)^4}{4!}+\ldots\right)-1}=$$

$$=\frac{\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}\ldots}{-\frac{(7z)^2}{2!}+\frac{(7z)^4}{4!}+\ldots}=z^3\frac{\frac{1}{5!}+\frac{z^2}{7!}\ldots}{-\frac{7^2}{2!}+\frac{7^4z^2}{4!}+\ldots}$$

т.е. $z=0$ *– полюс 3го полрядка*

Ч _1_12_04

$z\,\mathrm{tg}\,z e^{1/z}$

Особая точка : $z = 0$

Определим её тип

$$\lim_{z\to 0} z\,\mathrm{tg}\,z\cdot e^{1/z} = \lim_{z\to 0} z^2\cdot e^{1/z} = \lim_{z\to 0} z^2\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2\cdot 2!}+\frac{1}{z^3\cdot 3!}+\ldots\right)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\right)=\infty$$

$z = 0$ – *существенно особая точка, т.к. ряд содержит бесконечное число слагаемых с отрицательными степенями* z

Ч _1_13_04

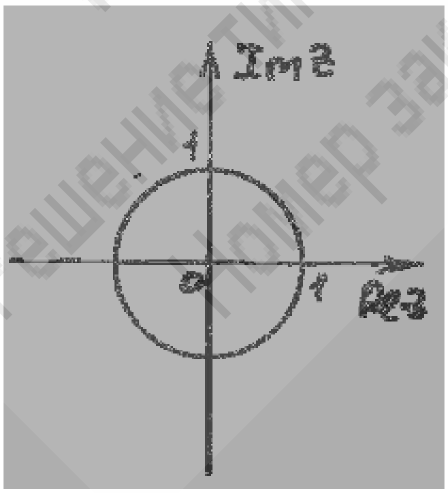
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{2+\sin z}{z(z+2i)}\,\mathrm{dz}$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

$z = 0 -$ *полюс* 1 *порядка*

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{2+\sin z}{z+2i} = \frac{1}{i}$$

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{2+\sin z}{z(z+2i)}\,\mathrm{dz} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{i} = 2\pi$$



$Ч\_1\_14\_04$

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z} dz$$

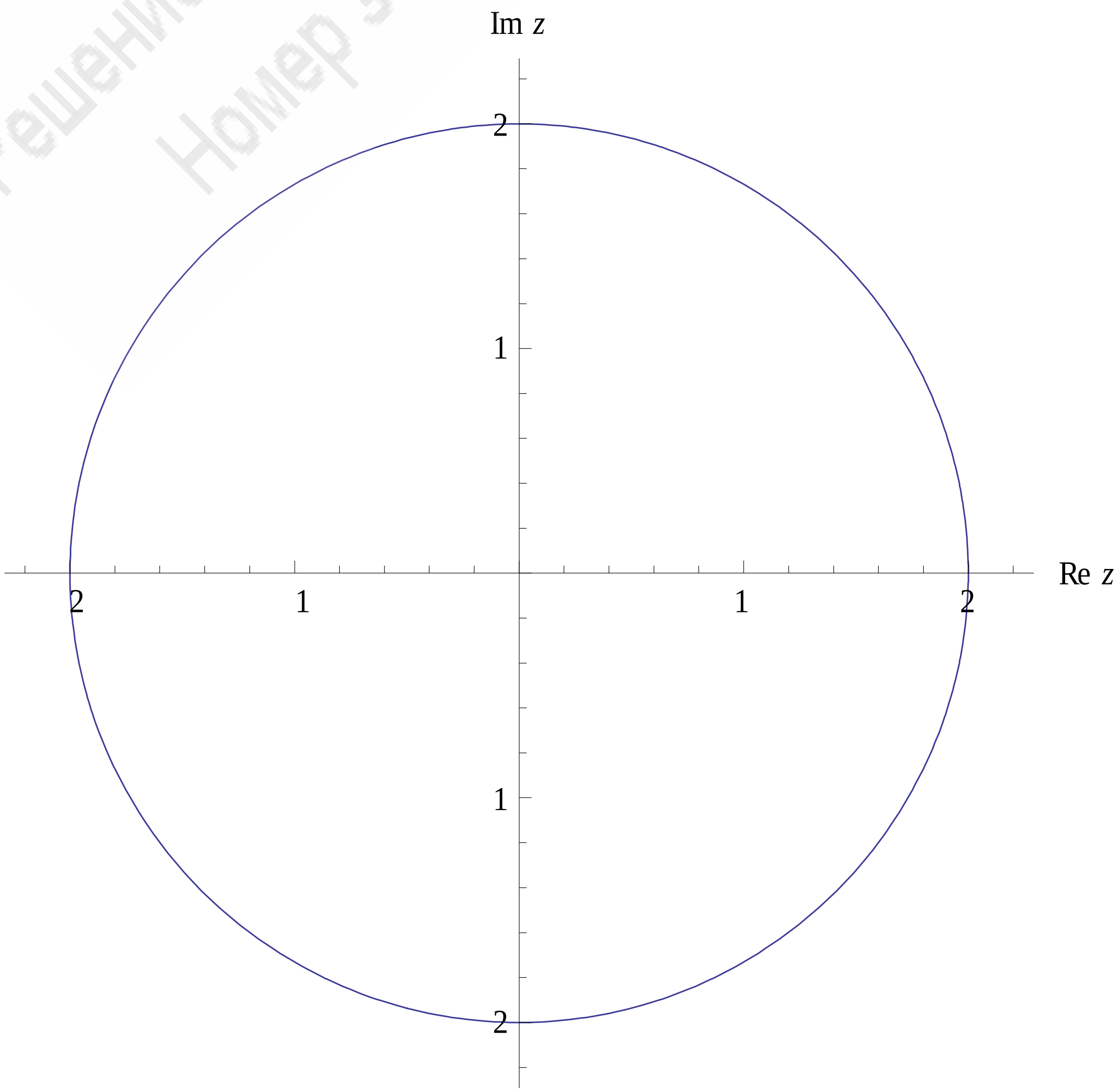
В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

$z=0$ – *устранимая особая точка, т.к.*

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z^3}{1-\cos z} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z^3}{2\sin^2(z/2)} = \lim_{z\to 0}\frac{z^3}{2(z/2)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0$$

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z} dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \cdot 0 = 0$$



$Ч\_1\_15\_04$

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} 3z - 1 - 9z^2/2}{z^4 \sin \frac{9z}{8}} dz$$

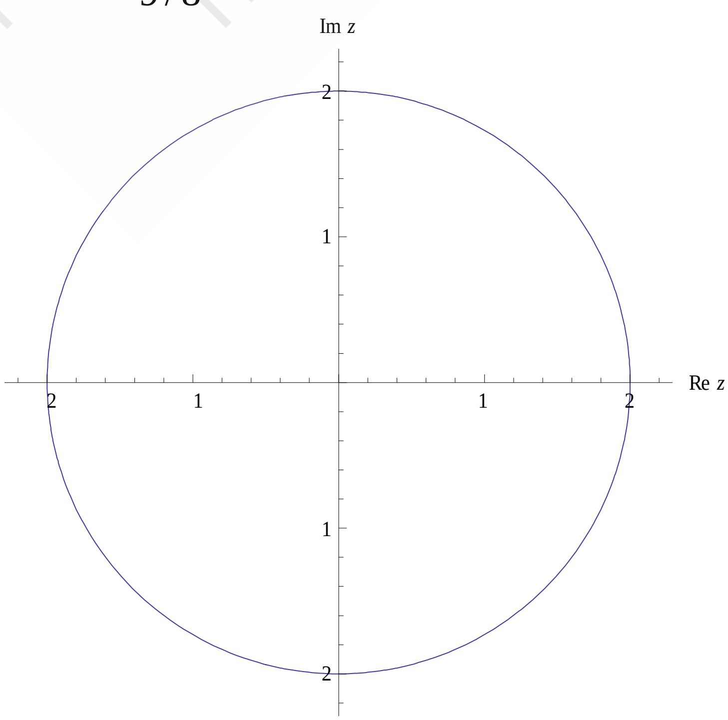
В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

$z = 0$ – *полюс 1го порядка*

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} 3z - 1 - 9z^2/2}{z^4 \sin \frac{9z}{8}} dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{ch} 3z - 1 - 9z^2/2}{z^3 \sin \frac{9z}{8}} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\left(1 + \frac{9z^2}{2} + \frac{81z^4}{24} + \ldots\right) - 1 - 9z^2/2}{z^3 \sin \frac{9z}{8}} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\frac{81z^4}{24} + \ldots}{z^3 \cdot \frac{9z}{8}} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{81/24}{9/8} = 6\pi i$$



$Ч\_1\_16\_04$

$$\oint\limits_{|z+2|=2}\left(z\operatorname{ch}\frac{1}{z+2}-\frac{2\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)}\right)dz=I=I_1-I_2$$

$$I_1=\oint\limits_{|z+2|=2}z\operatorname{ch}\frac{1}{z+2}dz$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

$z=-2$ – *существенно особая точка*

$$\operatorname*{res}_{z=-2}f_1(z)=C_{-1}$$

$$z\operatorname{ch}\frac{1}{z+2}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!\cdot(z+2)^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z+2-2}{(2n)!\cdot(z+2)^{2n}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{1}{(z+2)^{2n-1}}-\frac{2}{(z+2)^{2n}}\right)=z+\frac{1}{2(z+2)}-\frac{1}{(z+2)^2}+\ldots\Rightarrow C_{-1}=\frac{1}{2}$$

$$I_1=2\pi i\operatorname*{res}_{z=-2}f_1(z)=2\pi i\cdot C_{-1}=\pi i$$

$$I_2=\oint\limits_{|z+2|=2}\frac{2\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)}dz$$

В контур интегрирования попадает только одна особая точка:

$z=-1$ – *полюс 2го порядка*

$$I_2=\oint\limits_{|z+2|=2}\frac{2\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)}dz=2\pi i\operatorname*{res}_{z=-1}f_2(z)=2\pi i\lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\frac{2\sin\frac{\pi z}{2}}{z-1}=$$

$$=4\pi i\lim_{z\to-1}\frac{\cos\frac{\pi z}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(z-1)-\sin\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^2}=4\pi i\cdot\frac{1}{4}=\pi i$$

$$I=I_1-I_2=\pi i-\pi i=0$$

Ч _1_17 _04

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dt}}{6+\sqrt{35}\sin t}$$

полагаем $: z = e^{it} \Rightarrow \sin t = \dfrac{z^2-1}{2iz}, \mathrm{dt} = \dfrac{\mathrm{dz}}{iz}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dt}}{6+\sqrt{35}\sin t} = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{dz}/iz}{6+\sqrt{35}\dfrac{z^2-1}{2iz}} = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{dz}}{\dfrac{\sqrt{35}}{2}z^2+6iz-\dfrac{\sqrt{35}}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{35}} \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{dz}}{\left(z+i\sqrt{\dfrac{5}{7}}\right)\left(z+i\sqrt{\dfrac{7}{5}}\right)}$$

Особые точки подынтегральной функции :

$z = -i\sqrt{5/7}$

$z = -i\sqrt{7/5}$

В контур интегрирования попадет только

$z = -i\sqrt{5/7}$ *– полюс* 1*го порядка*

$$\frac{2}{\sqrt{35}} \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{dz}}{\left(z+i\sqrt{\dfrac{5}{7}}\right)\left(z+i\sqrt{\dfrac{7}{5}}\right)} = \frac{2}{\sqrt{35}} 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-i\sqrt{5/7}} f(z) =$$

$$= \frac{4\pi i}{\sqrt{35}} \lim_{z\to -i\sqrt{5/7}} \frac{1}{z+i\sqrt{\dfrac{7}{5}}} = \frac{4\pi i}{\sqrt{35}} \cdot \frac{-i\sqrt{35}}{2} = 2\pi$$

$Ч\_1\_18\_04$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos t\right)^2}$$

Полагаем: $z=e^{it}\Rightarrow dt=\dfrac{dz}{iz},\cos t=\dfrac{z^2+1}{2z}$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos t\right)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2}=\frac{4}{11i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z+\dfrac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)^2\left(z-\dfrac{1-2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)^2}$$

Особые точки подынтегральной функции:

$$z_1=\frac{1-2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

$$z_2=\frac{-1-2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

В контур интегрирования попадет только одна особая точка:

z_1 *– полюс 2го порядка*

$$\frac{4}{11i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z-\dfrac{-1-2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)^2\left(z-\dfrac{1-2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)^2}=\frac{4}{11i}2\pi i\operatorname*{res}_{z=z_1}f(z)=\frac{8\pi}{11}\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\frac{z}{\left(z-z_2\right)^2}=$$

$$=\frac{8\pi}{11}\lim_{z\to z_1}\frac{\left(z-z_2\right)^2-2z\left(z-z_2\right)}{\left(z-z_2\right)^4}=\frac{8\pi}{11}\lim_{z\to z_1}\frac{-z-z_2}{\left(z-z_2\right)^3}=\frac{8\pi}{11}\frac{-\dfrac{1-2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}-\dfrac{-1-2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}}{\left(\dfrac{1-2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}-\dfrac{-1-2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)^3}=$$

$$=\frac{8\pi}{11}\cdot\frac{11\sqrt{3}}{2}=4\pi\sqrt{3}$$

Ч _1_19_04

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+16\right)} \mathrm{dx}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(\mathrm{z})=\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+16\right)}$$

Её особые точки: $\mathrm{z}_1=2i, \mathrm{z}_2=-2i, \mathrm{z}_3=4i, \mathrm{z}_4=-4i$

В верхней полуплоскости лежат z_1 – *полюс* 2*го порядка и* z_3 – *полюс* 1*го порядка*

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z)=\lim_{z\to z_1}\frac{d}{\mathrm{dz}}\frac{1}{(z+2i)^2\left(z^2+16\right)}=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\left(-2(z+2i)^{-3}\left(z^2+16\right)^{-1}+(z+2i)^{-2}\cdot(-1)\left(z^2+16\right)^{-2}\right)=\frac{-i}{1152}$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z)=\lim_{z\to 4i}\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2(z+4i)}=\frac{-i}{1152}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+16\right)} \mathrm{dx}=2\pi i\cdot\left(\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z)+\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z)\right)=2\pi i\cdot\left(\frac{-i}{1152}+\frac{-i}{1152}\right)=\frac{\pi}{288}$$

$Ч\_1\_20\_04$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{dx}=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_m \operatorname*{res}_{z_m}\frac{z^2e^{iz}}{\left(z^2+1\right)^2}\right\}$$

особые точки $: z=\pm i$ *– полюсы 2го порядка.*

В верхней полуплоскости лежит только точка $z=i$

$$\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_m \operatorname*{res}_{z_m}\frac{z^2e^{iz}}{\left(z^2+1\right)^2}\right\}=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\operatorname*{res}_{z=i} f(z)\right\}=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\lim_{z\to i}\frac{d}{\mathrm{dz}}\frac{z^2e^{iz}}{(z+i)^2}\right\}=$$

$$=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\lim_{z\to i}\frac{\left(2ze^{iz}+z^2e^{iz}\cdot i\right)(z+i)^2-\left(z^2e^{iz}\right)\cdot 2(z+i)}{(z+i)^4}\right\}=$$

$$=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\lim_{z\to i}\frac{\left(\left(2z+z^2\cdot i\right)(z+i)-2z^2\right)e^{iz}}{(z+i)^3}\right\}=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\frac{\left(\left(2i+i^2\cdot i\right)(i+i)-2i^2\right)e^{i^2}}{(i+i)^3}\right\}=$$

$$=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\cdot 0\right\}=0$$

Ч _1_21_04

$$F(p)=\int_{-\infty}^{0} f_1(t)e^{-pt}\,\mathrm{dt}+\int_{0}^{a} f_2(t)e^{-pt}\,\mathrm{dt}+\int_{a}^{2a} f_3(t)e^{-pt}\,\mathrm{dt}+\int_{2a}^{3a} f_4(t)e^{-pt}\,\mathrm{dt}+\int_{3a}^{\infty} f_5(t)e^{-pt}\,\mathrm{dt}=$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot e^{-pt}\,\mathrm{dt}+\int_{0}^{a}(-1)\cdot e^{-pt}\,\mathrm{dt}+\int_{a}^{2a}1\cdot e^{-pt}\,\mathrm{dt}+\int_{2a}^{3a}(-2)\cdot e^{-pt}\,\mathrm{dt}+\int_{3a}^{\infty}0\cdot e^{-pt}\,\mathrm{dt}=$$

$$=-\int_{0}^{a} e^{-pt}\,\mathrm{dt}+\int_{a}^{2a} e^{-pt}\,\mathrm{dt}-2\int_{2a}^{3a} e^{-pt}\,\mathrm{dt}=-\left(\frac{-e^{-pt}}{p}\right)\Bigg|_{0}^{a}+\left(\frac{-e^{-pt}}{p}\right)\Bigg|_{a}^{2a}-2\left(\frac{-e^{-pt}}{p}\right)\Bigg|_{2a}^{3a}=$$

$$=-\left(\frac{-e^{-ap}}{p}-\frac{-e^{-0p}}{p}\right)+\left(\frac{-e^{-2ap}}{p}-\frac{-e^{-ap}}{p}\right)-2\left(\frac{-e^{-3ap}}{p}-\frac{-e^{-2ap}}{p}\right)=$$

$$=\frac{1}{p}\left(-\left(e^{-0p}-e^{-ap}\right)+\left(e^{-ap}-e^{-2ap}\right)-2\left(e^{-2ap}-e^{-3ap}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{p}\left(e^{-ap}-1+e^{-ap}-e^{-2ap}+2e^{-3ap}-2e^{-2ap}\right)=\frac{2e^{-ap}+2e^{-3ap}-1-3e^{-2ap}}{p}$$

$$\int e^{-pt}\,\mathrm{dt}=\frac{-1}{p}\int e^{-pt}\cdot(-p\,\mathrm{dt})=\frac{-1}{p}\int e^{-pt}\cdot d(-pt)=\frac{-e^{-pt}}{p}+C$$