7 _ 01 _ 08

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f\ dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f\ dx$$

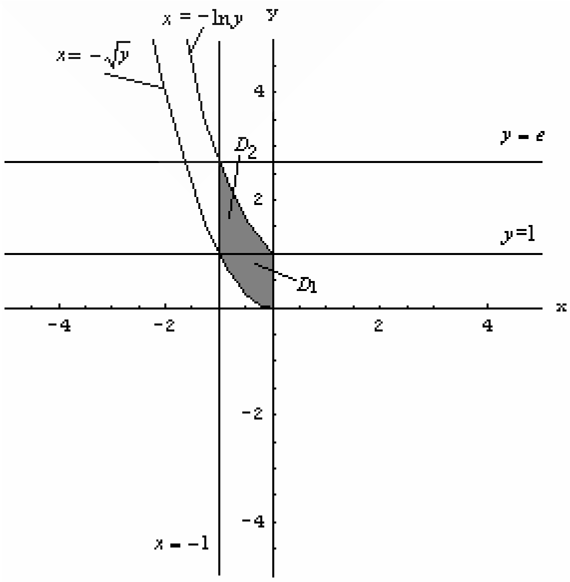
Решение:

Построим области интегрирования первого и второго интегралов.

Сумма повторных интегралов равна двойному интегралу по области $D = D_1 + D_2$.

Изменяем прядок интегрирования. Т.к внешнй интеграл теперь берем по x, то проектируем область $D = D_1 + D_2$ на ось Ox. При этом получим отрезок [-1;0], концы которого дают пределы интегрирования по x: -1 и 0. Из уравнений линий выражаем y через x. Для $x = -\sqrt{y}$: $y = x^2$, для $x = -\ln y$: $y = e^{-x}$.

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f\ dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f\ dx = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{e^{-x}} f\ dy$$



7 _ 02 _ 08

Вычислить:

$$\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy;$$

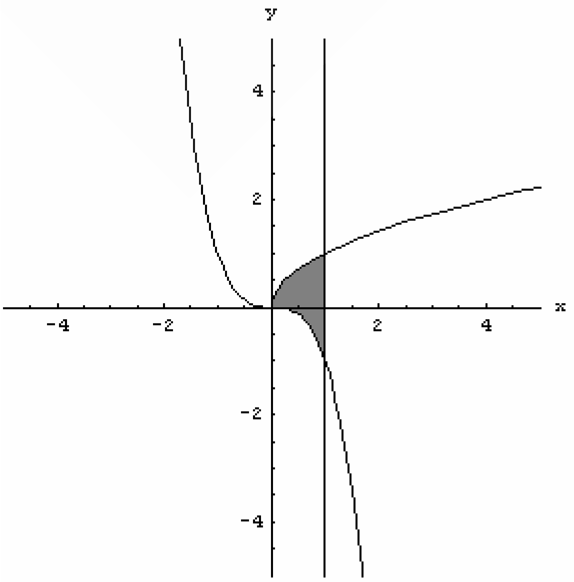
$$D:\ x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^3.$$

Решение:

Построим область интегрирования. Подынтегральная функция - многочлен по x,y, поэтому ее легко интегрировать в любом порядке. Если в повторном интеграле внешний нтеграл взять по y, а внутренний по x, то область интегрирования придется разбивать на части, т.к. левая граница области интегрирования состоит из кусков двух линий. Если же проинтегрировать сначала по y, затем по x, то область не нужно разбивать на части. В этом случае проецируем эту область на ось Ox, получаем отрезок [0;1], значит, пределы по x равны 0 и 1. Пределы интегрирования по y: $y = -x^3$, $y = \sqrt{x}$.

$$\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x^3}^{\sqrt{x}} \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dy = \int\limits_0^1 dx\left(9x^2y^3 + 12x^3y^4\right)\Big|_{-x^3}^{\sqrt{x}} =$$

$$= \int\limits_0^1 (9x^{7/2} + 12x^5 + 9x^{11} - 12x^{15})dx = \left(2x^{\frac{9}{2}} + 2x^6 + \frac{3}{4}x^{12} - \frac{3}{4}x^{16}\right)\Bigg|_0^1 = 4$$



7 _ 03 _ 08

Вычислить:

$$\iint\limits_D 4y^2 \sin xy \; dxdy;$$

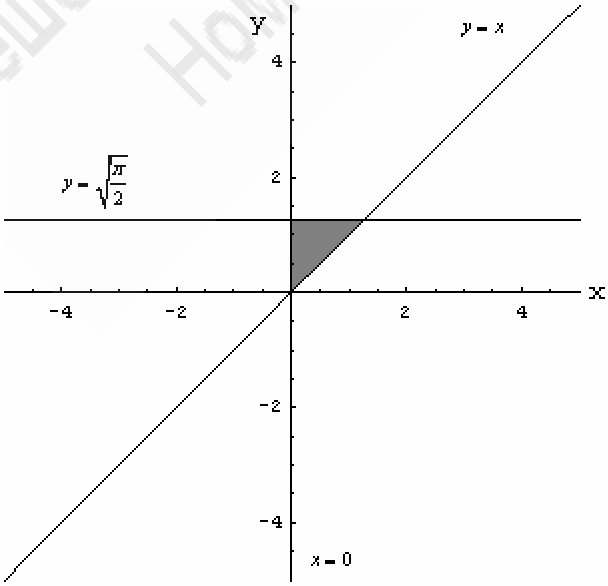
$$D: \; x = 0, \; y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \; y = x.$$

Решение:

Если при сведении двойного интеграла повторный интеграл взять по y, то для его вычисления придется дважды интегрировать по частям. Чтобы избежать этого, сначала проинтегрируем по x, затем по y.

$$\iint\limits_D 4y^2 \sin xy \; dxdy = \int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}} 4y^2 dy \int\limits_0^y \sin xy dx = \int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}} 4y^2 dy \left(-\frac{1}{\mathrm{y}} \cos xy \right) \Bigg|_0^y = \int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}} 4y^2 \frac{1}{y} \left(1 - \cos y^2 \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}} 4y \left(1 - \cos y^2 \right) dy = \int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}} 4y dy - \int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}} 4y \cos y^2 dy = \left(2\mathrm{y}^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} - \left(2 \sin y^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = -2 + \pi$$



7 _ 04 _ 08

Вычислить:

$$\iiint\limits_V x^2 z\sin\frac{xyz}{4}\;dx\;dy\;dz;$$

$$V\;\begin{cases}x=1,\;y=2\pi,\;z=4,\\ x=0,\;y=0,\;z=0.\end{cases}$$

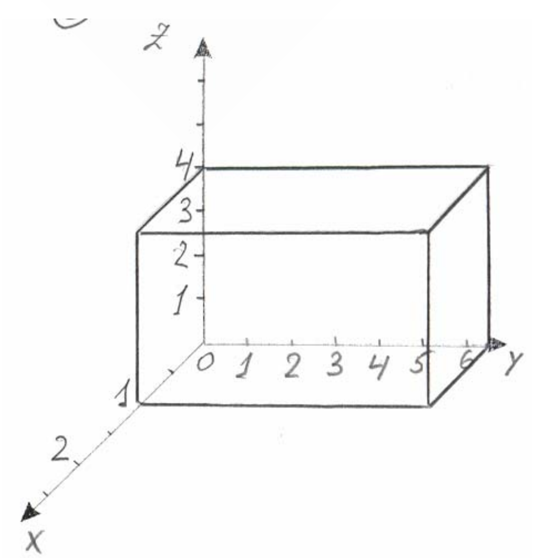
Решение:

Пределы интегрирования по z равны 0 и 4,по y будут 0 и 2π, по x - 0 и 1.

$$\iiint\limits_V x^2 z\sin\frac{xyz}{4}\;dx\;dy\;dz=\int_0^1 dx\int_0^4 dz\int_0^{2\pi} dy=\int_0^1 x^2dx\int_0^4 z\int_0^{2\pi}\sin\frac{xyz}{4}dz=\int_0^1 x^2dx\int_0^4 zdz\left(-4\frac{\cos\frac{xyz}{4}}{xz}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\int_0^1 x^2dx\int_0^4 z\frac{4}{xz}(1-\cos(\frac{\pi xz}{2}))dz=4\int_0^1 xdx\int_0^4(1-\cos(\frac{\pi xz}{2}))dz=4\int_0^1 xdx\left(z-2\frac{\sin\frac{\pi xz}{2}}{\pi x}\right)\Bigg|_0^4=\int_0^1 8x(2-\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x})d$$

$$=8\left(x^2+\frac{\cos 2\pi x}{2\pi^2}\right)\Bigg|_0^1=8+0=8$$



7_05_08

Вычислить:

$$\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^5};$$

$$V:\ \frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1,$$

$$x=0,\ y=0,\ z=0.$$

Решение:

Строим область интегрирования и ее проекцию на плоскость Oxy.

Область интегрирования снизу ограничена плоскостью $\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1$.

Последнее уравнение можно преобразовать к виду $z=3(1-x/16-y/8)$.

Это верхний предел интегрирования по z. Верхний равен 0. Пределы интегрирования по y и x находим из вида проекции. y: 0 и $8(1-x/16)$.

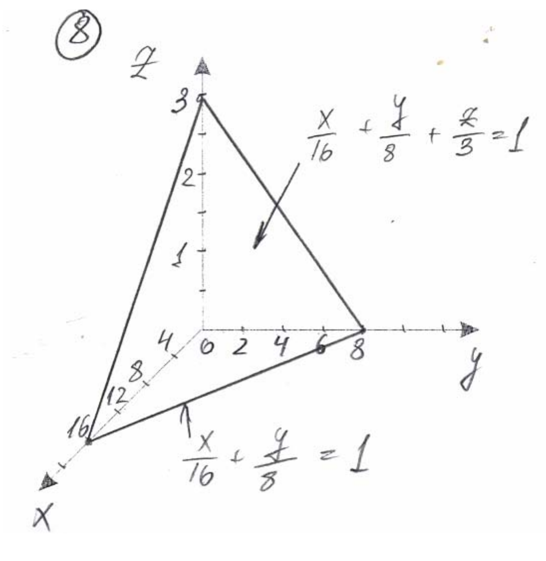
x: 0 и 16.

$$\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^5}=\int_0^{16}dx\int_0^{8(1-x/16)}dy\int_0^{3(1-x/16-y/8)}\frac{dz}{\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^5}=$$

$$=\int_0^{16}dx\int_0^{8(1-x/16)}dy\left(-\frac{3}{4\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^4}\right)\Bigg|_0^{3(1-x/16-y/8)}=$$

$$=\int_0^{16}dx\int_0^{8(1-x/16)}\left(-\frac{3}{64}+\frac{3}{4\left(1+x/16+y/8\right)^4}\right)dy=\int_0^{16}dx\left(-\frac{3y}{64}-\frac{2}{\left(1+x/16+y/8\right)^3}\right)\Bigg|_0^{8\left(1-x/16\right)}=$$

$$=\int_0^{16}\left(-\frac{3\left(1-x/16\right)-2}{8}+\frac{2}{\left(1+x/16\right)^3}\right)dx=\left(\frac{3x^2}{256}-\frac{5}{8}x-\frac{16}{\left(1+x/16\right)^2}\right)\Bigg|_0^{16}=3-10-4+16=5$$



7 _ 06 _ 08

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

$x^2 + y^2 = 12, \quad -\sqrt{6}y = x^2 \ \left(y \le 0\right).$

Решение:

Найдем точки пересечения линий функций:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ -\sqrt{6}y = x^2 \end{cases}$$

$$y^2 - 12 = \sqrt{6}y$$

$$y^2 - \sqrt{6}y - 12 = 0$$

$$y = 2\sqrt{6}$$

$$y = -\sqrt{6}$$

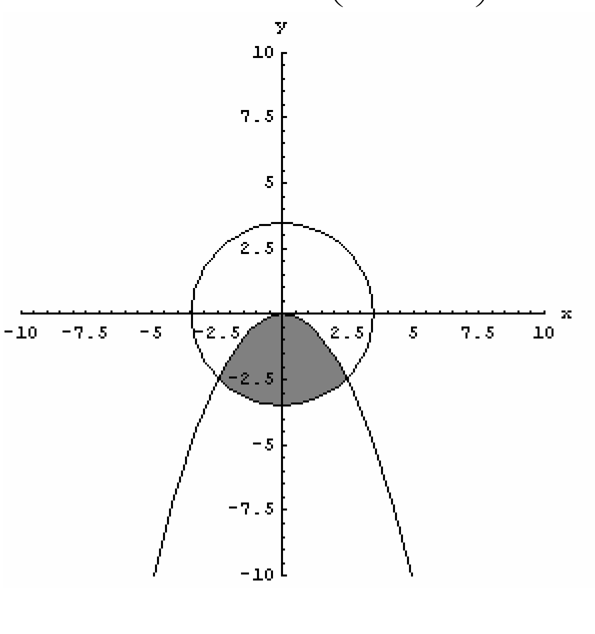
$$\left(\sqrt{6};-\sqrt{6}\right),\ \left(\sqrt{6};-\sqrt{6}\right)$$

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^{\sqrt{6}} dx \int\limits_{-\sqrt{12-x^2}}^{-x^2/\sqrt{6}} dy = 2\int\limits_0^{\sqrt{6}} dx\left(y\right)\Big|_{-\sqrt{12-x^2}}^{-x^2/\sqrt{6}} = 2\int\limits_0^{\sqrt{6}}\left(\sqrt{12-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{6}}\right)dx \overset{(1)}{=}$$

$$= 12\cdot\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{2x^3}{3\sqrt{6}}\Big|_0^{\sqrt{6}} = 12\cdot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - 4 = 3\pi + 2$$

$$(1)\ \int\limits_0^{\sqrt{6}} \sqrt{12-x^2}\,\mathrm{dx} = \left|\begin{array}{l} x = \sqrt{12}\sin t \\ \mathrm{dx} = \sqrt{12}\cos t\cdot dt \\ \sqrt{12-x^2} = \sqrt{12}\cos t \\ x = \sqrt{6} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array}\right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 12\cdot\cos^2 t dt = 12\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \left(6\cdot\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 6\cdot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}\right) = 6\cdot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$$



7 _ 07 _ 08

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

$x^2-2x+y^2=0,$

$x^2-10x+y^2=0,$

$y=0,\ y=\sqrt{3}x.$

Решение:

Два первых уравнения легко преобразовать к виду:

$(x-1)^2+y^2=1$

$(x-5)^2+y^2=25$

Эти уравнения определяют окружности.

Введем полярную систему координат:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$$

Окружность $x^2-2x+y^2=0$ имеет полярное уравнение

$r^2\sin^2\varphi-2r\cos\varphi+r^2\cos^2\varphi=0.$ Откуда $r=2\cos\varphi.$ Аналогично

$x^2-10x+y^2=0\Rightarrow r^2\sin^2\varphi-10r\cos\varphi+r^2\cos^2\varphi=0\Rightarrow r=10\cos\varphi.$

Прямая $y=\sqrt{3}x$ имеет полярное уравнение $r\sin\varphi=\sqrt{3}r\cos\varphi.$

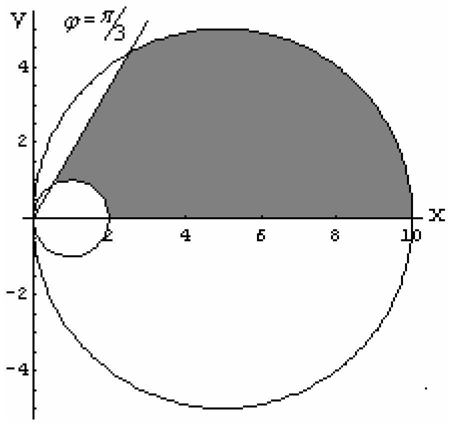
Откуда $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi={}^{\pi}\!/_{3}$. Аналогично

$y=0\Rightarrow r\sin\varphi=0\Rightarrow\sin\varphi=0\Rightarrow\varphi=0$

Тогда площадь фигуры будет определяться по формуле:

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^{\pi/3}d\varphi\int\limits_{2\cos\varphi}^{10\cos\varphi}rdr=\int\limits_0^{\pi/3}d\varphi\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{2\cos\varphi}^{10\cos\varphi}=\int\limits_0^{\pi/3}48\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=\left(24\varphi+12\sin2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/3}=6\sqrt{3}+8\pi\approx35.53$$



7 _ 08 _ 08

Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, μ - поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

$D:\ x^2+y^2=4,\ \ x^2+\ y^2=25,$

$\quad x=0,\ y=0\ \left(x\ge 0,\ y\le 0\right);$

$\quad \mu=\left(2x-3y\right)\Big/\left(x^2+y^2\right).$

Решение:

$x^2+y^2=4,\ \ x^2+\ y^2=25-$ уравнения окружностей с центром в начале координат и радиусами 2 и 5 соответственно. Условия $\left(x\ge 0,\ y\le 0\right)$ задают угол -π/2 до 0

В двойном интеграле перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$$

При этом получим

$$\mu=\frac{2r\cos\varphi-3r\sin\varphi}{r^2}$$

$r^2=4$

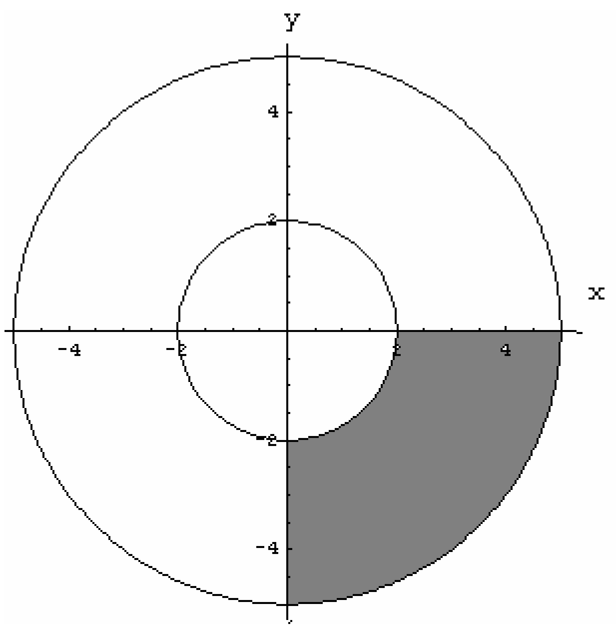
$r^2=25$

Получим:

$$M_D=\iint\limits_D \mu\left(x,y\right)dxdy=\int\limits_{-\pi/2}^{0}d\varphi\int\limits_{2}^{5}\frac{r\left(2\cos\varphi-3\sin\varphi\right)}{r^2}rdr=\int\limits_{-\pi/2}^{0}\left(2\cos\varphi-3\sin\varphi\right)d\varphi\left(r\right)\Big|_2^5=$$

$$=3\int\limits_{-\pi/2}^{0}\left(2\cos\varphi-3\sin\varphi\right)d\varphi=3\left(2\sin\varphi+3\cos\varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{0}=3\left(2\sin 0+3\cos 0\right)-3\left(2\sin\frac{-\pi}{2}+3\cos\frac{-\pi}{2}\right)=$$

$$=3\cdot 3-3\left(-2\right)=15$$



7 _ 09 _ 08

Пластинка D задана неравенствами, μ - поверхностная плотность.

Найти массу пластинки.

$D:\ 1 \le x^2/4 + y^2/9 \le 4;$

$\quad x \ge 0,\ \ y \ge 3x/2;$

$\quad \mu = x/y.$

Решение:

Обобщенная полярная сиситема координат:

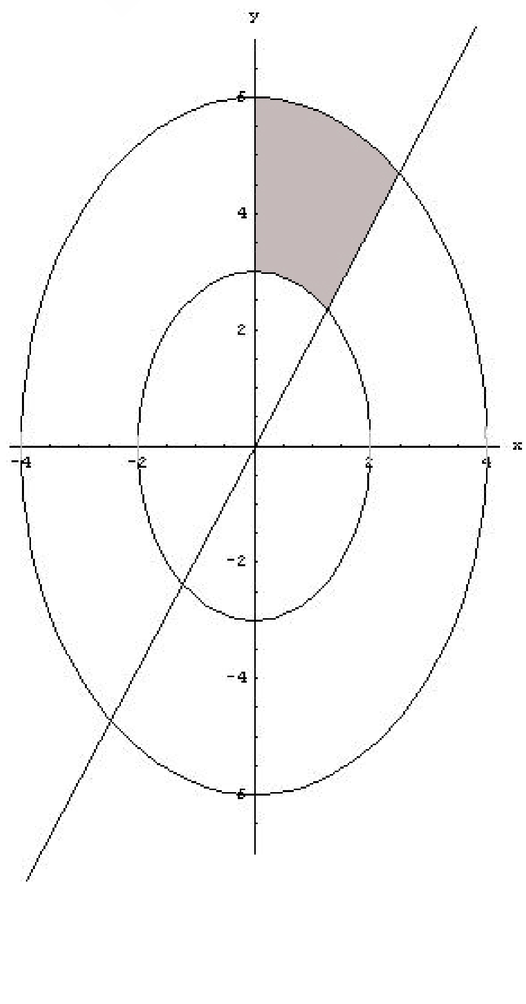
$$(1)\ \begin{cases} x = 2r\cos\varphi \\ y = 3r\sin\varphi \end{cases}$$

Якобиан перехода равен

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial r} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2\cos\varphi & -2r\sin\varphi \\ 3\sin\varphi & 3r\cos\varphi \end{Vmatrix} = 6r$$

$$m = \iint_D m(x,y)\,\mathrm{dx\,dy} \overset{(1)}{=} \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_1^2 6r\cdot\frac{2}{3}\mathrm{ctg}\varphi\,\mathrm{dr} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{ctg}\varphi\cdot d\varphi\cdot\int_1^2 4r\,\mathrm{dr} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\sin\varphi\right)}{\sin\varphi}\cdot\left(4\frac{r^2}{2}\Big|_1^2\right) = \left(\ln\left|\sin\varphi\right|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot 2\cdot(4-1) = \left(0-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 6 = 3$$



7_10_08_1

Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

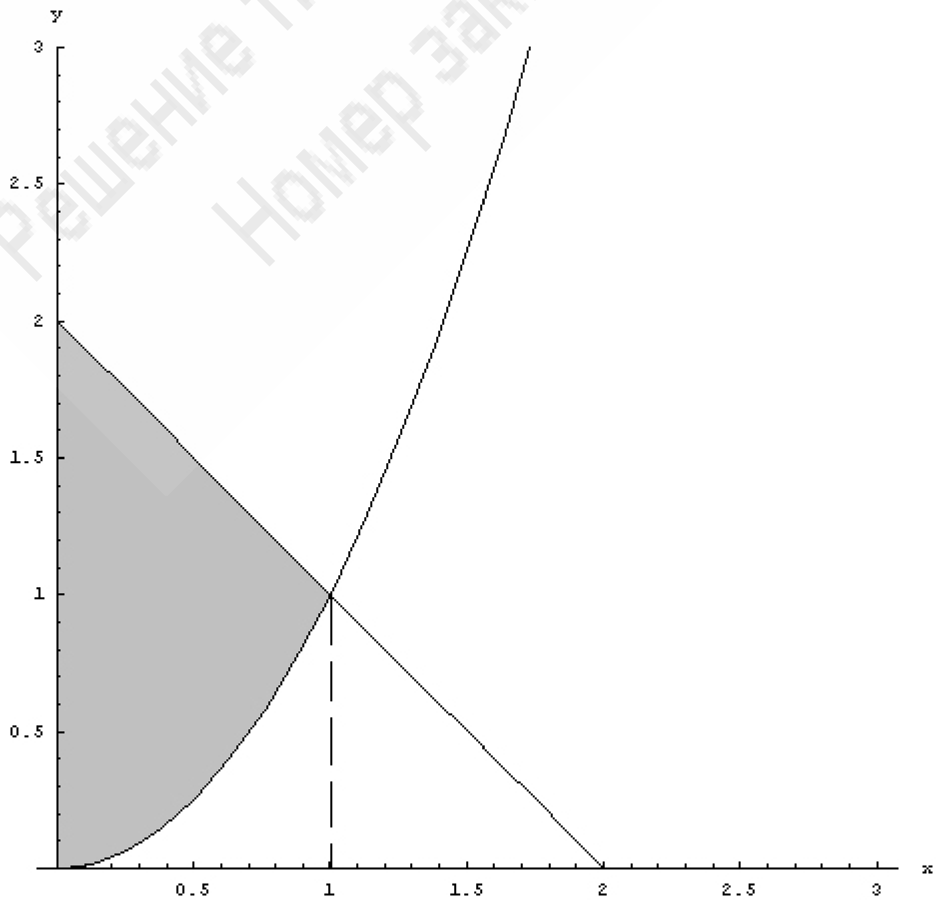
$x + y = 2, \;\; x = \sqrt{y},$

$z = 12x/5, \;\; z = 0.$

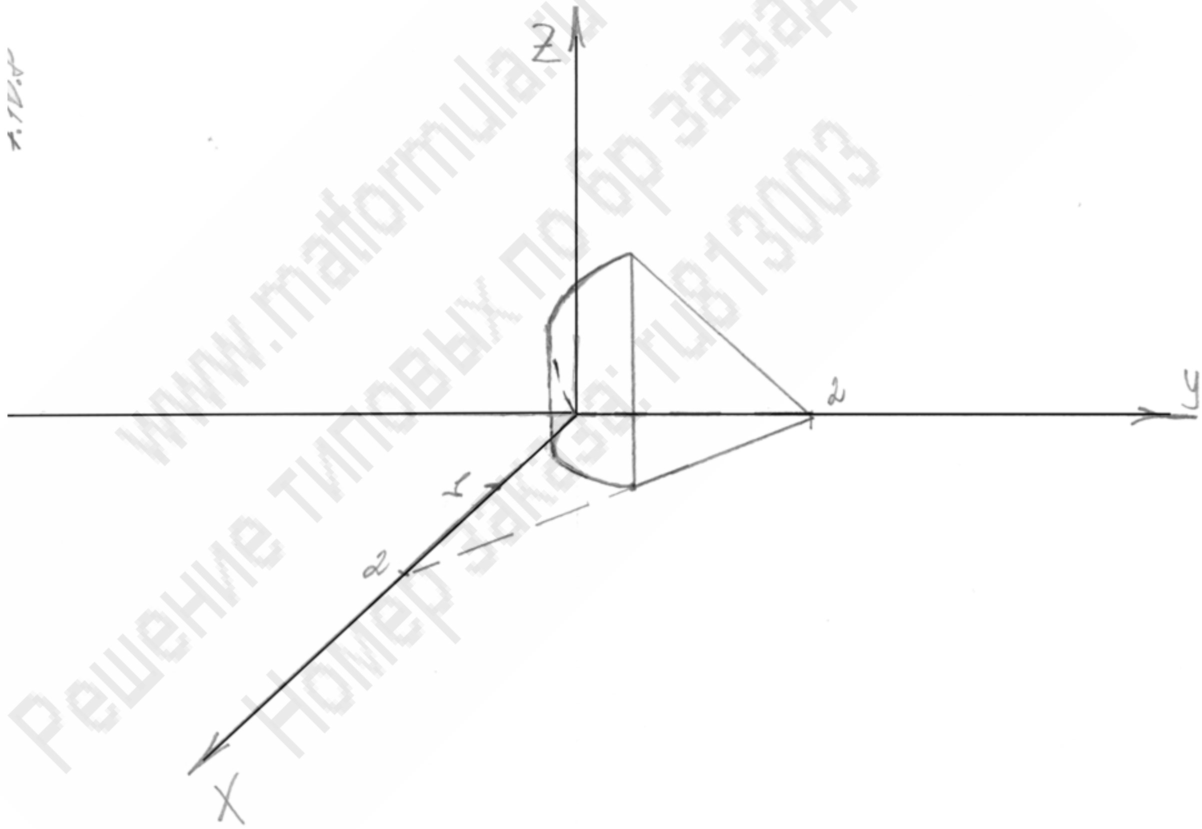
Решение:

$$V = \iiint\limits_G \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int\limits_0^1 \mathrm{dx} \int\limits_{x^2}^{2-x} \mathrm{dy} \int\limits_0^{12x/5} \mathrm{dz} = \frac{12}{5} \cdot \int\limits_0^1 x\left(2 - x - x^2\right)\mathrm{dx} = \frac{12}{5} \cdot \left(x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{12}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1$$



7_10_08_2



7_11_08_1

Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$x^2+y^2=2y,\ \ x^2+y^2=5y,$

$z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0.$

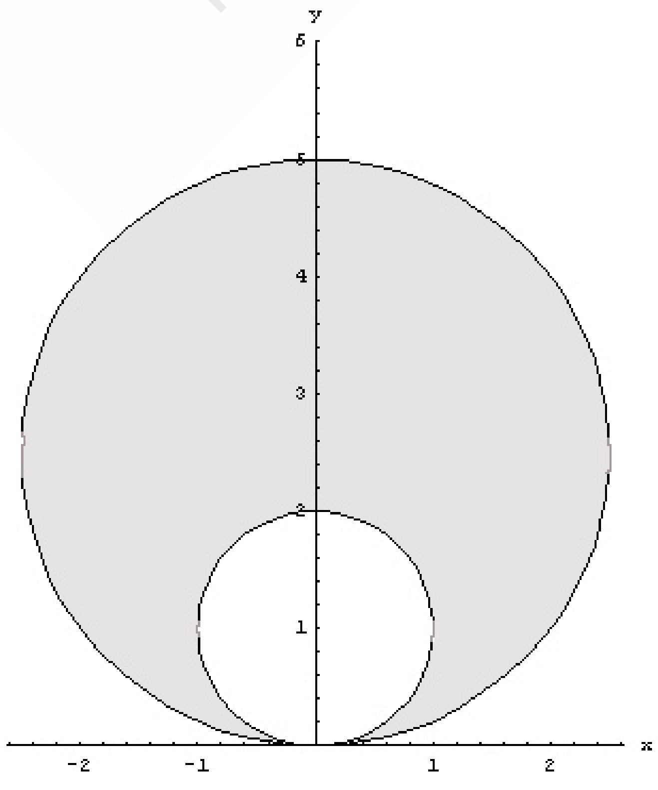
Решение:

Перейдем к цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$$

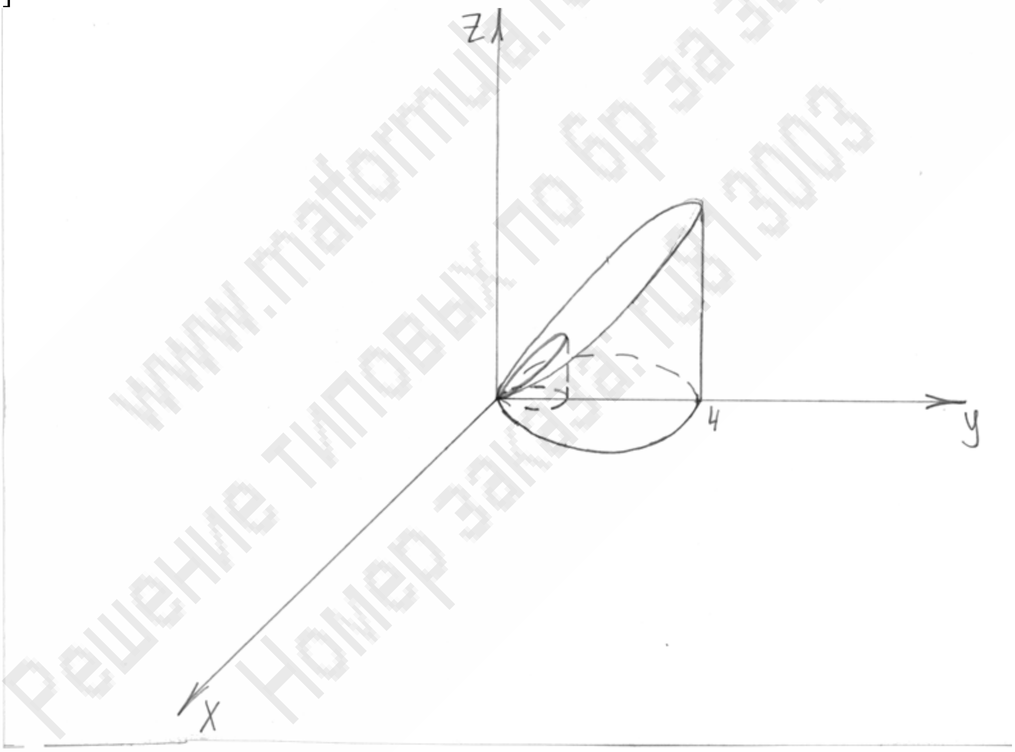
$$V=\int_0^{\pi}d\varphi\int_{2\sin\varphi}^{5\sin\varphi}r\,\mathrm{dr}\int_0^{r}\mathrm{dz}=\int_0^{\pi}d\varphi\int_{2\sin\varphi}^{5\sin\varphi}r^2\,\mathrm{dr}=\int_0^{\pi}\left(\frac{r^3}{3}\Big|_{2\sin\varphi}^{5\sin\varphi}\right)\cdot d\varphi=39\cdot\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\cdot d\varphi=$$

$$=-39\cdot\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\varphi\right)\cdot d\left(\cos\varphi\right)=-39\cdot\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{\varphi}\right)\Big|_0^{\pi}=39\cdot\frac{4}{3}=52$$



7_11_08_2

]



7 _ 12 _ 08 _ 1

Найтиобъем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$y = 6x^2 - 1, \;\; y = 5,$

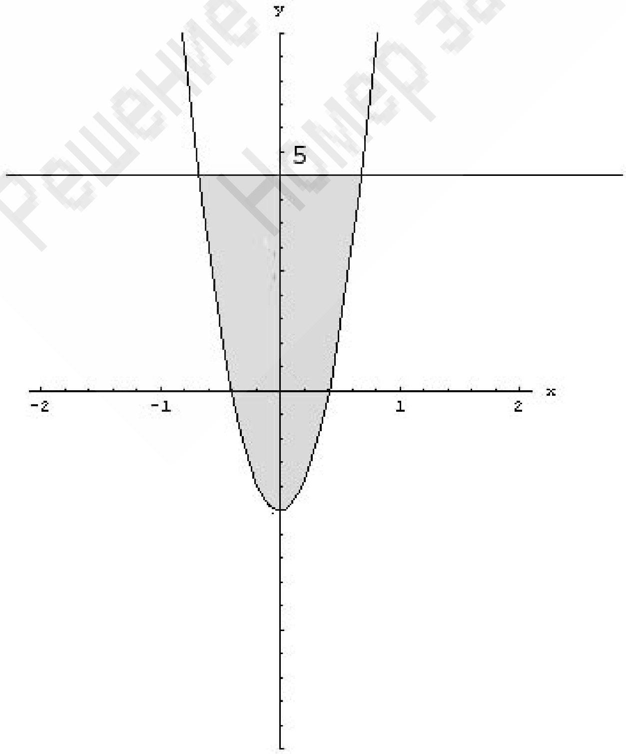
$z = 2x^2 + x - y^2,$

$z = 2x^2 + x - y^2 + 4.$

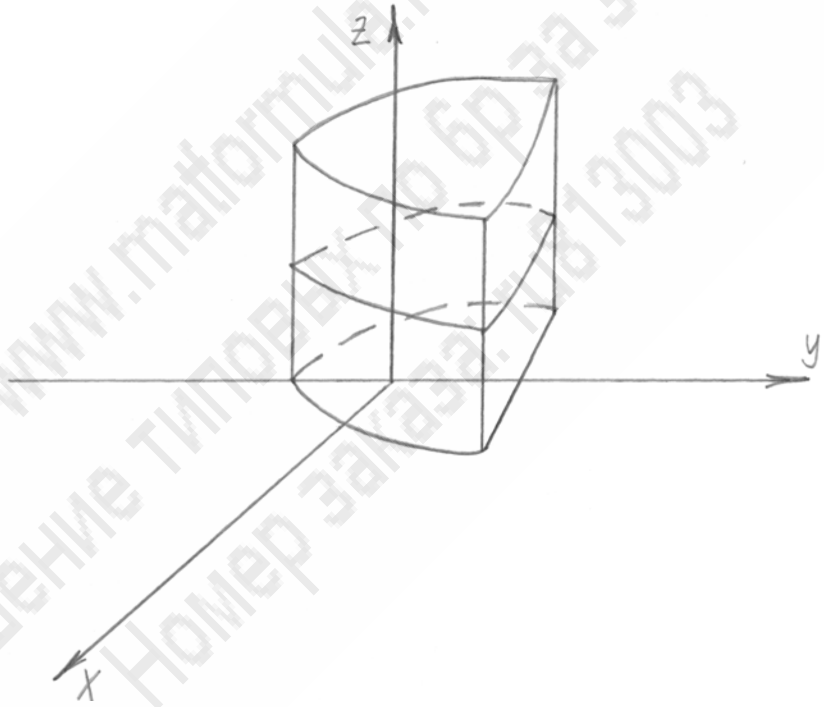
Решение:

$$V = \int_{-1}^{1} \mathrm{dx} \int_{6x^2-1}^{5} \mathrm{dy} \int_{2x^2+x-y^2}^{2x^2+x-y^2+4} \mathrm{dz} = \int_{-1}^{1} \mathrm{dx} \int_{6x^2-1}^{5} 4 \cdot \mathrm{dy} = 4\int_{-1}^{1} \left(6 - 6x^2\right) \mathrm{dx} = 24 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= 24 \cdot \frac{4}{3} = 24$$



7_12_08_2



7 _ 13 _ 08

Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$z=\sqrt{100-x^2-y^2}$, $z=6$,

$x^2+y^2=51$

$($внутри цилиндра$)$.

Решение:

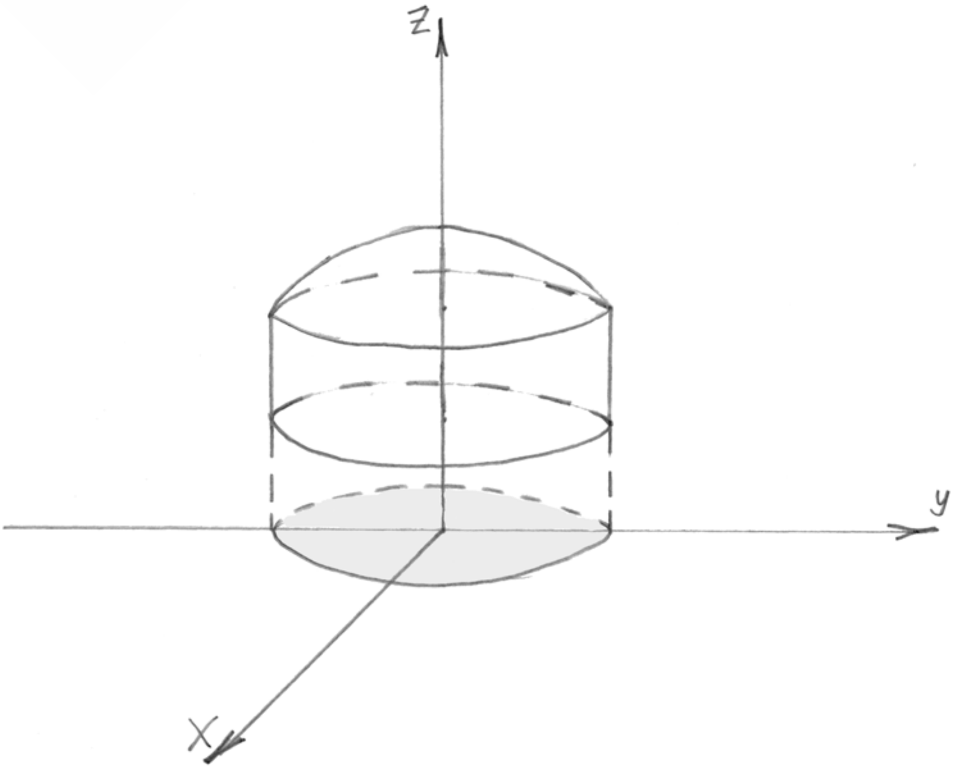
Перейдем к цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$V=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{51}} r\,\mathrm{dr} \int_6^{\sqrt{100-r^2}} \mathrm{dz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{51}} r\cdot\left(\sqrt{100-r^2}-6\right)\mathrm{dr}=$$

$$=\int_o^{2\pi} d\varphi\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\sqrt{51}}\sqrt{100-r^2}\cdot d\left(100-r^2\right)-\int_0^{\sqrt{51}} 6\cdot r\,\mathrm{dr}\right)=\int_o^{2\pi} d\varphi\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot\left(100-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-3r^2\right)\Bigg|_0^{\sqrt{51}}=$$

$$=\int_0^{2\pi} 66\cdot d\varphi=132\pi$$



7_14_08_1

Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$z = 4 - 6\left[(x-1)^2 + y^2\right],$

$z = 12x - 8.$

Решение:

Перейдем к цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

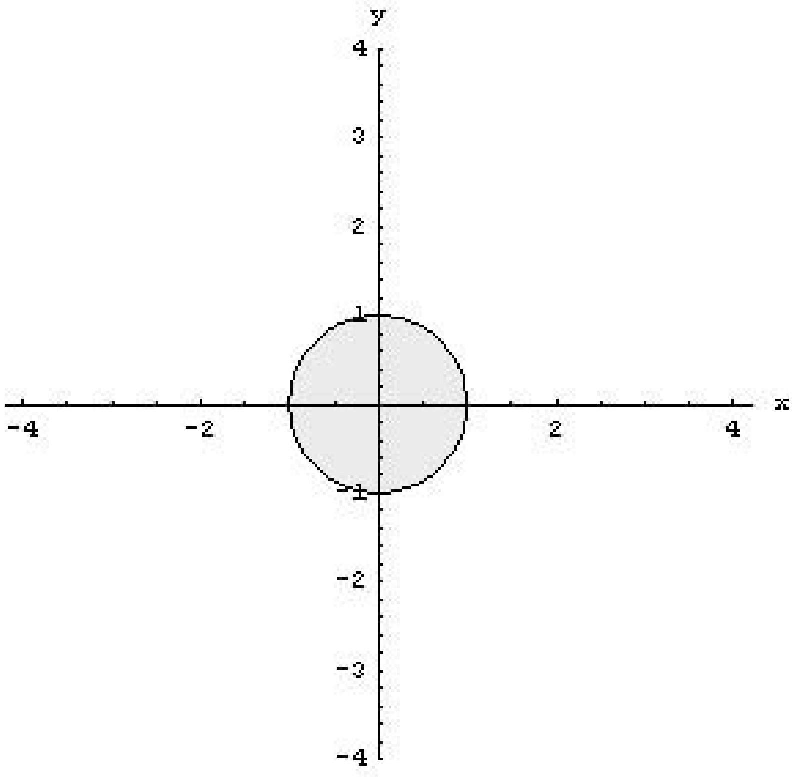
Найдем линию пересечения поверхностей:

$$4 - 6\left[(x-1)^2 + y^2\right] = 12x - 8$$

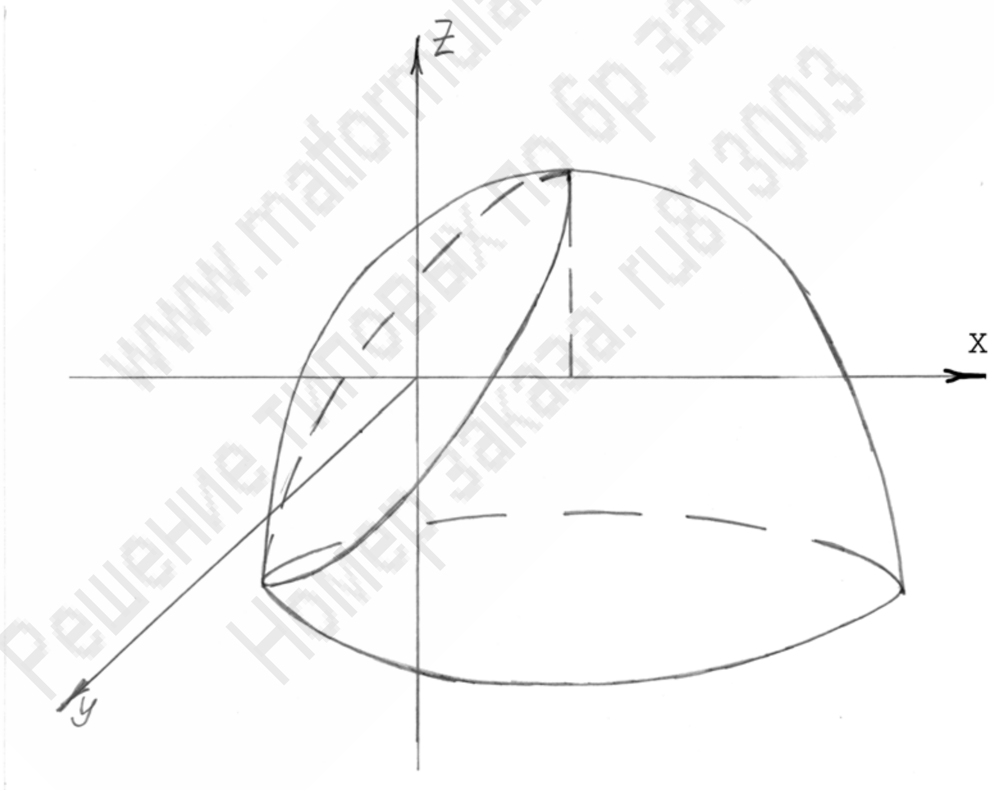
$$(x-1)^2 + y^2 = -2x + 2$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,\mathrm{dr} \int_{12r\cos\varphi - 8}^{4-6\left(r^2 - 2r\cos\varphi + 1\right)} \mathrm{dz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\cdot\left(6 - 6r^2\right)\mathrm{dr} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\left(3r^2 - 1{,}5r^4\right)\Big|_0^1 = \int_0^{2\pi} 1{,}5\cdot d\varphi = 3\pi$$



7_14_08_2



7 _15 _ 08 _1

Найти объем тела, заданного неравенствами:

$$25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 121,$$

$$-\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \le z \le 0,$$

$$y \ge -\frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \ge -\sqrt{3}x.$$

Решение:

Перейдем к сферической системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

Якобиан преобразования равен $r^2\cos\theta$

$$V = \int_{-\pi/6}^{2\pi/3} d\varphi \int_{-\operatorname{arc}tg\frac{1}{\sqrt{24}}}^{0} d\theta \cdot \int_{5}^{11} r^2\cos\theta \,\mathrm{dr} = \int_{-\pi/6}^{2\pi/3} d\varphi \int_{-\operatorname{ar}ctg\frac{1}{\sqrt{24}}}^{0} \cos\theta \cdot d\theta \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_5^{11} =$$

$$= 420 \cdot \int_{-\pi/6}^{2\pi/3} d\varphi \cdot \int_{-arctg\frac{1}{\sqrt{24}}}^{0} coa\theta \cdot d\theta = 402 \cdot \int_{-\pi/6}^{2\pi/3} d\varphi \cdot \sin\theta \Big|_{-arctg\frac{1}{\sqrt{24}}}^{0} =$$

$$= 402 \cdot \int_{-\pi/6}^{2\pi/3} \left(\sin\left(arctg\frac{1}{\sqrt{24}}\right)\right) \cdot d\varphi$$

Находим :

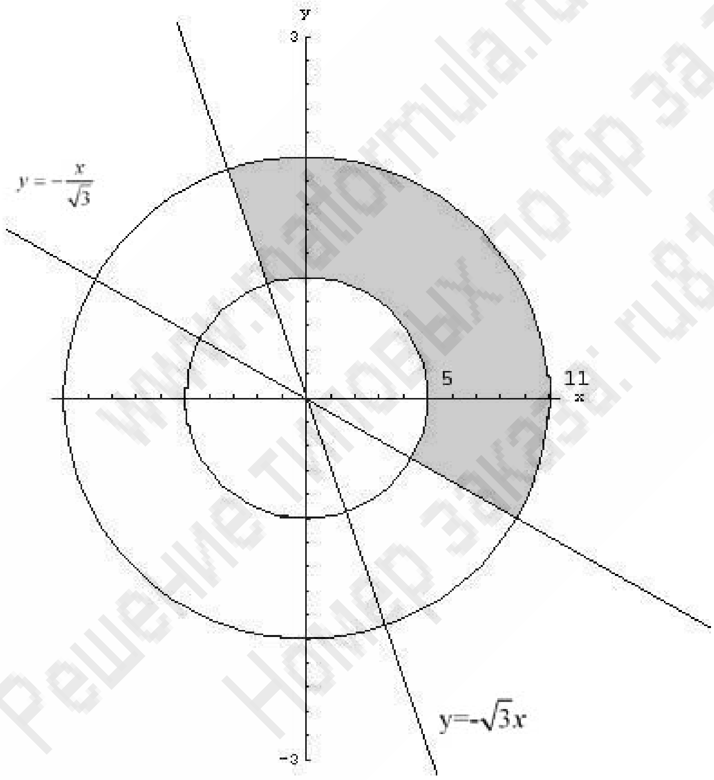
$$\alpha = arcth\frac{1}{\sqrt{24}} \iff tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{24}} \Rightarrow ctg\alpha = \sqrt{24}$$

$$\text{так как } 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\ ,\text{то} \quad \sin\alpha = \frac{1}{5}$$

Получаем :

$$V = 402 \cdot \int_{-\pi/6}^{2\pi/3} \frac{1}{5} \cdot d\varphi = 402 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5\pi}{6} = 67\pi$$

7_15_08_2



7_16_08_1

Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ - плотность.

Найти массу тела.

$x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 8z,$

$x = 0, \ \ y = 0, \ \ z = 0 \ \ \left(x \ge 0, \ \ y \ge 0\right);$

$\mu = 5x.$

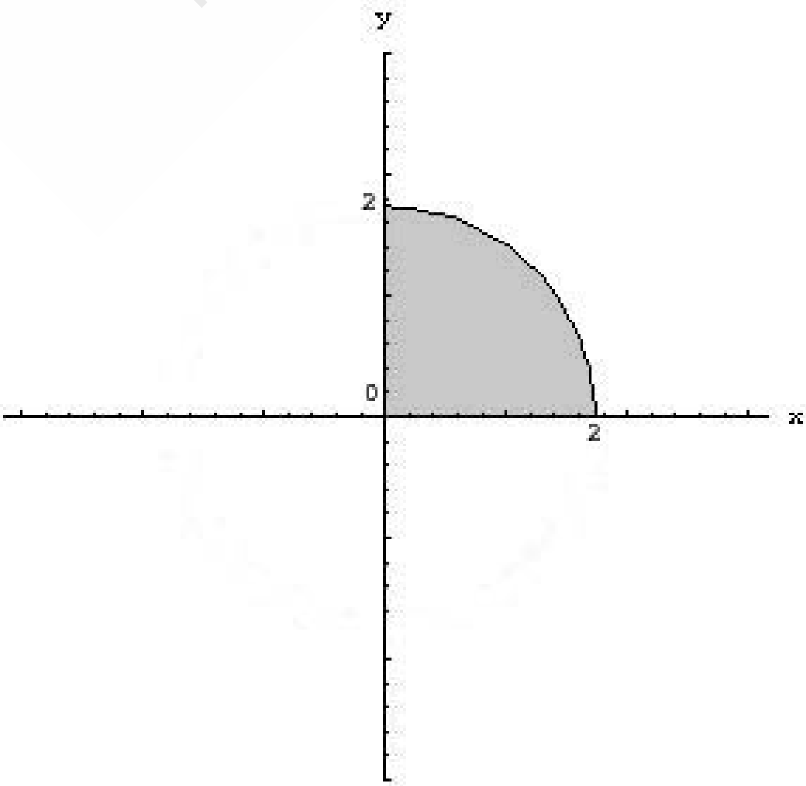
Решение:

Перейдем к цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$M = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int\limits_0^2 r\,\mathrm{dr} \int\limits_0^{r^2/8} 5r \cdot \cos\varphi\,\mathrm{dz} = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int\limits_0^2 \left(5r^2 \cos\varphi \cdot z \Big|_0^{r^2/8}\right)\mathrm{dr} =$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int\limits_0^2 r^4 \cdot \cos\varphi\,\mathrm{dr} = \frac{5}{8} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi \cdot d\varphi \cdot \frac{r^5}{5}\Big|_0^2 = 4 \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi \cdot d\varphi = 4\sin\varphi \Big|_0^{\pi/2} = 4$$



7_16_08_2