# Определения по мат. анализу (IV семестр)

http://avti-13-07.ucoz.ru
StreltsovAlA@mpei.ru

28 июня 2009 г.

**Аннотация**

В данный документ вынесены основные определения из лекций IV семестра математического анализа (ТФКП). Нумерация вопросов в билетах соответствует нумерации параграфов. Некоторые вопросы, например, 5 и 34-й здесь не представлены. Disclaimer: в тексте могут быть ошибки (многое набиралось в спешке) - сверяйтесь с лекциями.

## Содержание

# 1 Определения

**Определение 1.** *Пусть $E$ - множество на комплексной плоскости. Говорят, что на множестве $E$ задана функция $f(x)$, если каждому комплексному числу $Z \in E$ ставится в соответствие по некоторому закону определенное комлпексное число $w$ или совокупность комплексных чисел $w_1, w_2, \dots$*

**Определение 2.** *$\varepsilon$-окрестностью точки $z_0$ называется множество точек $z$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \varepsilon$ обознач. $U_\varepsilon(z_0)$.*

**Определение 3.** *Областью $D$ называется множество, удовлетворяющее двум условиям:*

1. *$D$ - открытое множество, т.е. $\forall z \in D \ \exists \ U_\varepsilon(z) \subset D$*
2. *$D$ - связное множество, т.е. любые две точки можно соединить непрерывной кривой, лежащей в области $D$.*

**Определение 4.** *Окрестностью точки $z_0$ называется любое открытое множество, содержащее эту точку и обозначается $U(z_0)$.*

## 1.1 Предел функции комплексной переменной

Пусть функция f(z) определена в $\dot{U}(z_0) = U(z_0) \backslash \{z_0\}$.

**Определение 5.** *Число $w_0$ называется пределом функции $f(z)$ при $z \to z_0$ если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$. Обозначается:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

.

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z_0 = x_0 + iy, z = x + iy, w_0 = u_0 + iv_0$.

**Утверждение.**

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x \to x_0, y \to y_0} u(x, y) = u_0 \\ \exists \lim\limits_{x \to x_0, y \to y_0} v(x, y) = v_0 \end{array} \right\}$$

**Теорема 1.** *Если $\lim_{z \to z_0} f(z), \lim_{z \to z_0} g(z)$, то*

1. $\exists \lim\limits_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) + \lim\limits_{z \to z_0} g(z)$
2. $\exists \lim\limits_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = [\lim\limits_{z \to z_0} f(z)] \cdot [\lim\limits_{z \to z_0} g(z)]$
3. *Если, кроме того,* $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)}$

## 1.2 Непрерывность функции комплексной переменной

Пусть $f(z)$ определена в $U(z_0)$

**Определение 6.** *Функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0$ если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.*

**Определение 7.** *Функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0$ если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall z : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.*

**Утверждение.** *Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \leftrightarrow u(x, y), v(x, y)$ непрерывны в точке $(x_0, y_0)$.*

**Теорема 2.** *Пусть функции $f(z)$, $g(z)$ непрерывны в т. $z_0$, тогда:*

1. *функция $[f(z) + g(z)]$ непрерывна в точке $z_0$*
2. *функция $[f(z) \cdot g(z)]$ непрерывна в точке $z_0$*
3. *если $g(z_0) \neq 0$, то функция $[\frac{f(z)}{g(z)}]$ непрерывна в т. $z_0$*

## 1.3 Производная функции комплексной переменной

**Определение 8.** *Если $\exists \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$, то он называется производной функции $f(z)$ и обозначается $f'(z)$.*

**Определение 9.** *Функция $f(z)$ называется* ***дифференцируемой*** *в точке $z$, если в точке $z$ она имеет производную.*

**Определение 10.** *Функция $f(z)$ называетя* ***дифференцируемой*** *в точке $z$, если ее приращение в точке $z$ можно представить в виде: $\Delta f(z) = w(z) \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z$, где $\alpha(\Delta z)$ - бесконечно малая функция при $\Delta z \to 0$ $(\alpha(\Delta z) \to 0)$*

## 1.4 Дифференцируемость функции комплексной переменной

**Теорема 3.** *Если функции $f(z), g(z)$ дифференцируемы в точке $z$, то:*

1. *функция $[f(z) + g(z)]$ дифференцируема в т. $z$ и $[f(z) + g(z)]' = f'(z) + g'(z)$*
2. *функция $[f(z) \cdot g(z)]$ дифференцируема в т. $z$ $[f(z) \cdot g(z)]' = f'(z)g(z) + g'(z)f(z)$*
3. *если $g(z) \neq 0$ в точке $z$, то функция $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]$ дифференцируема в т. $z$ и*

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z) + g'(z)f(z)}{g^2(z)}$$

**Теорема 4.** *Пусть сложная функция $f(g(z))$ определена в некоторой окрестности $U(z_0)$, пусть функция $g(z)$ дифференцируема в точке $z_0$, функция $f(w)$ дифференцируема в точке $w_0 = g(z_0)$. Тогда сложная функция $f(g(z))$ дифференцируема в точке $z_0$ и $f'(g(z))|_{z=z_0} = f'(w_0)g'(z_0)$.*

**Теорема 5.** *Пусть функция f(z) отображает взаимнооднозначно окрестность* $U(z_0)$ *на некоторую окрестность точки* $w_0 = f(z_0)$*. Пусть* $f(z)$ *дифференцируема в точке* $z_0, f'(z_0) \neq 0$*, и обратная к* $f(z)$ *функция* $z = \varphi(w)$ *непрерывна в точке* $w_0$*. Тогда* $\varphi(w_0)$ *дифференцируема в точке* $w_0$ *и*

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

.

**Теорема 6.** *Функция* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *дифференцируема в точке* $z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow$ *функции* $u(x,y), v(x,y)$ *дифференцируемы в точке* $x_0, y_0$ *и в ней выполняются условия Коши-Римана:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Пусть $f(z)$ определена в области D и точка $z_0 \in D$

**Определение 11.** *Функция f(z) называется **аналитической** в точке* $z_0$*, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.*

**Определение 12.** *Функция **аналитична** в области D, если она аналитична в каждой точке области D.*

**Замечание.** *Если функция аналитична в точке, то она дифференцируема в этой точке (следует из определения). Обратное неверно.*

### 1.5 Элементарные функции комплексной переменной

### 1.6 Интеграл от функции комплексной переменной

Пусть L - кусочно-гладкая ориентированная кривая. Разбиваем L на n частей точками $z_1, \ldots, z_{n-1}, z_0 = A, z_n = B$. Обозначим $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}, |\Delta z_k| = |z_k - z_{k-1}|$ (длина отрезка). $\lambda = \max\limits_{1 \leq l \leq n} |\Delta z_k|$ - параметр разбиения. Выбираем все точки $\xi_k \in z_{k-1}\breve{} z_k$. Пусть функция $f(z)$ определена на кривой L. Составим интегральную сумму:

$$\sigma(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta z_k$$

**Определение 13.** *Если* $\exists \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma(f)$*, не зависящий от разбиения и выбора точек* $\xi_k$*, то он называется **интегралом** от функции* $f(z)$ *вдоль кривой Łи обозначается:* $\displaystyle\int_L f(z)dz$.

### 1.7 Свойства интеграла от ФКП

**Теорема 7.** *Пусть L - кусочно-гладкая ориентированння кривая и функция f(z) непрерывна на L, тогда*

$$\exists \int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i \int_L vdx + udy$$

*где* $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$.

**Определение 14** (Свойства интеграла от ФКП). *Пусть $L$ - кусочно-гладкая ориентированная кривая и функции $f(z), g(z)$ непрерывны на $L$. Тогда справедливы свойства:*

1. $$\int_L (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_L f(z)dz + \beta \int_L g(z)dz$$

   *где $\alpha, \beta$ произвольные комплексные константы.*

2. $\forall C \in \breve{AB} \int_{\breve{AB}} f(z)dz = \int_{\breve{AC}} f(z)dz + \int_{\breve{CB}} f(z)dz$

3. $\int_{\breve{AB}} f(z)dz = -\int_{\breve{BA}} f(z)dz$

4. *Пусть $L$ - гладкая кривая, заданная параметрическим уравнением $z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta, t$ - вещественный параметр. Пусть $f(z)$ непрерывна на кривой $L$. Тогда*

   $$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

5. *Пусть $f(z)$ непрерывна на $L$. Тогда*

   $$\left|\int_L f(z)dz\right| \leq \int_L |f(z)||dz| \leq Ml$$

   *где $M = \max\limits_L |f(z)|$, $l$ - длина кривой $L$.*

### 1.8 Лемма Гурса

**Теорема 8** (Лемма Гурса). *Пусть $D$ - область, Г - кусочно-гладкая замкнутая кривая, лежашая в $D$. $f(z)$ непрерывна в $D \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ существует ломаная $\Gamma_\varepsilon$, вписанная в кривую Г, так что*

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz - \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz\right| < \varepsilon$$

### 1.9 Слабая формулировка интегральной теоремы Коши

**Теорема 9** (Слабая формулировка интегральной теоремы Коши). *Пусть $D$ - односвязная область. Функция $f(z)$ аналитична в $D$ и $f'(z)$ непрерывна в $D$, тогда для каждой кусочно-гладкой замкнутой кривой $\Gamma \subset D : \int_\Gamma f(z)dz = 0$.*
*$D$ - односвязная область, если для каждой замкнутой кривой $L \subset D$ внутренность $L$ также принадлежит области $D$.*

### 1.10 Интегральная теорема Коши

**Теорема 10.** *Пусть $D$ - односвязная область и $f(z)$ аналитична в $D$, тогда для каждой кусочно-гладкой замкнутой кривой $\Gamma \subset: D \int_\Gamma f(z)dz = 0$.*

**Замечание** *Теорема не верна для многосвязной области.*

**Замечание** *Теорема верна для многосвязной области, если Г ограничивает односвязную область* $\in D$*, т.е. внутренность* $\Gamma \in D$*.*

### 1.11 Обобщение интегральной теоремы Коши для односвязной области

**Теорема 11.** *Пусть D - односвязная область с кусочно-гладкой границей Г. Пусть* $f(z)$ *аналитична в области D и непрерывна в* $\bar{D}$*, тогда:*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

### 1.12 Теорема Коши для многосвязной области

**Теорема 12.** *Пусть D - ограниченная многосвязная область, граница которой состоит из непересекающихся кусочно-гладких замкнутых кривых* $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$*, причем все контуры* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *лежат внутри Г. Пусть* $f(z)$ *аналитична в D и непрерывна в* $\bar{D}$*, тогда*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

### 1.13 Интегральная формула Коши

**Теорема 13.** *Пусть* $f(z)$ *аналитична в области D и непрерывна в* $\bar{D}$*. Тогда* $\forall z \in D$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}dz$$

*где Г - граница области, обходимая в "+" направлении.*

### 1.14 Высшие производные

**Теорема 14.** *Если функция* $f(z)$ *аналитична в области D и непрерывна в* $\bar{D}$*, то* $\forall z \in D$ *функция* $f(z)$ *имеет в точке z производную любого порядка и*

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n-1}}d\xi,\ n = 1, 2, \ldots}$$

*Г - граница области, обходимая в "+" направлении.*

**Определение 15.** *Говорят, что функциональная последовательность* $\{f_n(z)\}$ *сходится равномерно к f(z) на кривой L в обалсти D, если* $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall z \in L (\forall z \in D) : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

**Теорема 15.** *Пусть последовательность* $\{f_n(z)\}$ *сходится равномерно к f(z) на кривой L и функции* $f_n(z), n = 1, 2, \ldots$ *непрерывны на кривой L. Тогда справедлива формула:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_L f_n(z)dz = \int_L f(z)dz$$

*то есть*

$$\lim_{n\to\infty}\int_L f_n(z)dz = \int_L \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz$$

**Следствие.** *Если функция f(z) аналитична в области D, то она бесконечно дифференцируема в области D.*

**Следствие** (Неравенства Коши). *Пусть f(z) аналитична в* $B_R(z_0) = \{z : |z - z_0| < R\}$ *и непрерывна на границе Г области* $B_R(z_0)$*. Тогда справедливы неравенства Коши:*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{M \cdot n!}{R^n}, n = 1, 2, \dots$$

$$\text{где } M = \max_{z\in\Gamma} |f(z)|$$

### 1.15 Первообразная функции комплексной переменной

**Определение 16** (О первообразной функции). *Функция F(z) называется первообразной функции f(z) в области D, если* $\exists F'(z) = f(z) \forall z \in D$

**Теорема 16.** *Если F(z) - первообразная f(z) в области D, тогда* $\forall C = const$ *функция* $[F(z) + c]$ *также первообразная функции f(z) в области D.*

**Теорема 17.** *Если* $F_1(z), F_2(z)$ *- первообразные функции f(z) в области D*

$$\Rightarrow F_1(z) - F_2(z) = C\ (C = const)\ \forall z \in D$$

### 1.16 Аналитичность функции верхнего предела

**Теорема 18.** *Пусть функция f(z) аналитична в односвязной области D. Тогда функция верхнего предела* $F(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ *(*$z, z_0$ *- произвольные фиксированные точки из D) аналитична в области D и* $F'(z) = f(z)\ \forall z \in D$*.*

### 1.17 Теорема Морера

**Теорема 19.** *Пусть f(z) непрерывна в D и* $F(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$*, где* $z, z_0 \in D$ *не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки* $z_0$ *и* $z$ *и лежащего в D, тогда f(z) аналитична в области D.*

### 1.18 Формула Ньютона-Лейбница

**Теорема 20.** *Пусть f(z) аналитична в области D и F(z) - первообразная f(z) в D, тогда* $\forall z_0, z \in D$*:*

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = F(z) - F(z_0)$$

### 1.19 Неравенства Коши. Теорема Лиувилля

**Теорема 21** (Теорема Лиувилля). *Пусть f(z) аналитична во всей комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ *и ограничена по модулю в* $\mathbb{C}$*, тогда f(z) постоянна в* $\mathbb{C}$*, т.е. const.*

### 1.20 Комплексные числовые ряды

**Комплексный числовой ряд** - это выражение вида

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n$$

Сумма n первых членов ряда $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k$ называется *частичной суммой* ряда.

**Определение 17.** *Если* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ *называется сходящимся, где* $\sigma$ *- сумма ряда. В противном случае ряд называется расходящимся.*

**Утверждение.** *Комплексный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ *сходится* $\Leftrightarrow$ *сходятся действительные числовые ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *для* $\forall n : C_n = a_n + ib_n; a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

**Определение 18.** *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ *сходится абсолютно, если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |C_n|$ *сходится.*

**Утверждение.** *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ *сходится абсолютно, то он сходится и в обычном смысле.*

### 1.21 Равномерная сходимость функционального ряда. Теорема Вейерштрасса

**Определение 19.** *Пусть* $\{f_n(z)\}$ *- последовательность функций, определенных на множестве* $D$. *Функциональный ряд - это выражение вида*

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

**Определение 20.** *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится в точке* $z_0 \in D$ *если сходится числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$.

**Определение 21.** *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится на множестве* $D$, *если он сходится в каждой точке множества* $D$.

**Определение 22.** *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится равномерно на множестве* $E$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall z \in E \ \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| < \varepsilon$$

**Определение 23.** *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится равномерно к f(z) на E, если* $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ *сходится равномерно на E при* $n \to \infty$.

**Теорема 22.** *Пусть функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится равномерно к функции f(z) на множестве E и все функции* $f_n(z)$ *непрерывны на множестве E. Тогда f(z) непрерывна на E.*

**Теорема 23.** *Пусть функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится равномерно на кривой Г и все члены ряда - непрерывные на Г функции* $f_n(z), n = 1, 2, \ldots$. *Тогда функциональный ряд можно почленно интегрировать на Г:*

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Gamma f_n(z)dz$$

**Теорема 24** (Вейерштрасса)**.** *Пусть функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится равномерно на каждом компакте K из области D и функции* $f_n(z)$ *аналитичны в области D. Тогда:*

1. *f(z) аналитична в области D*
2. *Ряд можно почленно дифференцировать в области D любое число раз:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \quad \forall z \in D \ \forall k = 1, 2, \ldots$$

3. *Ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ *сходятся равномерно к* $f_n^{(k)}(z)$ *на каждом компакте из области D.*

### 1.22 Степенной ряд. Теорема Абеля. Формула Коши-Адамара

**Степенной ряд** - это функциональный ряд вида:

$$C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$$

где $z_0$ - фиксированная точка, $\{C_n\}$ - комплексная числовая последовательность. Степенной ряд всегда сходится в точке $z_0$.

**Теорема 25** (Абеля)**.** *Пусть степенной ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ *(1) сходится в точке* $z_1 \neq z_0$. *Тогда:*

1. *Степенной ряд (1) сходится абсолютно* $\forall z : |z - z_0| < |z_1 - z_0|$
2. *Степенной ряд (2) сходится равномерно в круге* $|z - z_0| \le r < |z_1 - z_0|$

**Определение 24.** *Радиусом сходимости R степенного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ *называется неотрицательное число или* $+\infty$*, обладающее свойством: степенной ряд сходится в круге* $|z - z_0| < R$ *и расходится, если* $|z - z_0| > R$.

**Теорема 26** (Формула Коши-Адамара)**.** *Радиус сходимости степенного ряда вычисляется по формуле:*

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}$$

*Кроме того,*

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|}$$

### 1.23 Разложение аналитической функции в ряд Тейлора

**Определение 25.** *Пусть функция f(z) бесконечно дифференцируема в точке* $z_0$*, тогда ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ *называется рядом Тейлора функции f(z) с центром в точке* $z_0$.

**Теорема 27.** *Если f(z) аналитична в некотором круге* $|z-z_0| < R$*, то в этом круге f(z) может быть разложена в ряд Тейлора:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

### 1.24 Единственность разложения в ряд Тейлора

**Теорема 28.** *Если f(z) - сумма степенного ряда, т.е.* $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$*, то* $C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots$*. Другими словами для каждого сходящегося степенного ряда есть ряд Тейлора своей суммы.*

### 1.25 Единственность аналитической фунции

Пусть $\varphi(z)$ определена в $U(z_0)$ и $\varphi(z_0) = 0 \Rightarrow$ $z_0$ - ноль функции $\varphi(z)$.

**Определение 26.** $z_0$ *называется нулем какого-либо порядка функции* $\varphi(z)$*, если* $\varphi(z_0) = 0, \varphi'(z_0), \ldots, \varphi^{(k-1)}(z_0) = 0, \varphi^{(k)}(z_0) \neq 0$.

**Теорема 29.** *Пусть f(z) и g(z) аналитичны в некоторой области D. Пусть значения f(z) и g(z) совпадают на некоторой последовательности точек* $\{z_k\} \subset D$*, так что* $\{z_k\} \xrightarrow[k\to\infty]{} z_0$*.* $z_0$ *- внутрення точка области D. Тогда* $f(z) \equiv g(z)$ *в D.*

**Замечание.** *Если f(z) аналитична в области D и* $f(z) \not\equiv 0$*, то* $f(z) \not\equiv 0$ *ни в какой подобласти D.*

### 1.26 Разложение функции в ряд Лорана

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n$ (1)

**Теорема 30.** *Если f(z) аналитична в кольце $r < |z-z_0| < R$, то в этом кольце f(z) может быть разложена в ряд (1), где коэффициенты вычисляются по формулам:*

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ \ (2)$$

$$\gamma_\rho : |z - z_0| > \rho, r < \rho < R$$

*$\gamma_\rho$ обходится в положительном направлении.*

**Определение 27.** *Ряд (1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (2), называется рядом Лорана функции f(z) с центром в точке $z_0$. При этом $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n$ - правильная часть ряда, а $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-z_0)^n$ - главная часть ряда.*

### 1.27 Устранимая особая точка. Разложение функции в ряд Лорана

**Определение 28.** *Точка $z_0$ называется изолированной особой точкой f(z), если $\exists \dot{U}_\delta(z_0)$, в которой f(z) аналитична.*

1. *$z_0$ - устранимая особая точка, если существует конечный $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$*
2. *$z_0$ - полюс функции f(z), если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$*
3. *$z_0$ - существенно особая точка, если $\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.*

**Теорема 31.** *Точка $z_0$ - устранимая особая точка f(z) $\Leftrightarrow$ разложение f(z) в ряд Лорана в окрестности точки $z_0$ не содержит главной части, т.е. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n$.*

### 1.28 Полюс. Разложение функции в ряд Лорана

**Определение 29.** *Точка $z_0$ называется полюсом k-ого порядка, если она является нулем k-ого порядка функции $\varphi(z)$.*

**Теорема 32.** *Точка $z_0$ является полюсом f(z) $\Leftrightarrow$ главная часть лорановского разложения функции f(z) в окрестности $z_0$ содержит конечное число членов:*

$$f(z) = \frac{C_{-k}}{(z-z_0)^k} + \ldots + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n$$

*где $C_{-k} \neq 0$, $k$ - порядок полюса.*

### 1.29 Существенно особая точка. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса

**Теорема 33.** *Точка $z_0$ - существенно особая точка f(z) $\Leftrightarrow$ главная часть Лорановского разложения f(z) в окрестности $z_0$ содержит бесконечное число слагаемых.*

**Теорема 34** (Сохоцкого-Вейерштрасса)**.** *Пусть $z_0$ - существенно особая точка f(z). Тогда $\forall A \in \overline{\mathbb{C}}$ (расширенная комплексная плоскость) $\exists \{z_k\} \to z_0, z_k \neq z_0 \ \forall k$ : $\{f(z_k)\} \xrightarrow[k\to\infty]{} A$.*

### 1.30 Вычет функции. Формула для вычисления вычетов

Пусть $z_0$ - изолированная особая точка f(z).

**Определение 30.** *Вычетом функции f(z) в точке $z_0$ называется число*

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz$$

*где $\gamma = \{|z - z_0| = \rho\}$, где $\rho$ достаточно мала, т.к. $\gamma \subset \dot{U}_\delta(z_0)$ (область аналитичности) функции f(z), обход по $\gamma$ против часовой стрелки.*

1. *$z_0$ - изолированная особая точка $\Rightarrow \operatorname{res} f(z_0) = C_{-1}$*
2. *$z_0$ - устранимая особая точка $\Rightarrow C_{-1} = 0$*
3. *$z_0$ - полюс k-ого порядка*

$$\Rightarrow \operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \{f(z)(z-z_0)^k\}$$

### 1.31 Теорема Коши о вычетах

**Теорема 35.** *Пусть f(z) аналитична в ограниченной области D за исключением конечного числа точек $z_1, \ldots, z_n$. Пусть f(z) непрерывна на границе Г области D. Тогда*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)$$

*обход по Г производится в положительном направлении.*

### 1.32 Вычет функции в бесконечно удаленной точке

Пусть f(z) аналитична на множестве $|z| > \mathbb{R}$

**Определение 31.** *Вычетом f(z) в бесконечно удаленной точке называется число*

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} f(z)dz$$

*где $\Gamma = \{|z| = R\}$, обход по часовой стрелке.*

$$\operatorname{res} f(\infty) = -C_{-1}$$

**Теорема 36.** *Пусть f(z) аналитична в $\mathbb{C}$ за исключением конечнрого числа особых точек $z_1, \ldots, z_{n-1}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{res} f(z_k) = 0$ где $z_n = \infty$.*

### 1.33 Лемма Жордана

**Теорема 37.** *Пусть функция g(z) аналитична в верхней полуплоскости за исключением конечного числа особых точек. Пусть* $\lim\limits_{|z|\to\infty} g(z) = 0$ *равномерно по аргументу z. Тогда*

$$\forall\lambda > 0 \quad \lim_{|z|\to\infty} \int_{\Gamma_R} g(z)e^{i\lambda z}dz = 0$$

*где* $\Gamma_R = \{|z| = \mathbb{R}, \Im z > 0\}$

### 1.34 Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов

### 1.35 Преобразования Лапласа

**Определение 32.** *Комплекснозначная функция f(t) действительного аргумента t называется функцией-оригиналом, если:*

1. *f(t) определена* $\forall t$*, причем* $f(t) = 0$ *при* $t < 0$
2. *f(t) кусочно-непрерывная функция*
3. *Существуют числа* $M, S : |f(t)| \leq M \cdot e^{St}$ $\forall t$ *(*)*
   *Обозначим* $S_0 = \inf S$ *по всем S, так что справедлива (*)* $\Rightarrow$ $S_0$ *называется показателем роста функции f(t).*

**Определение 33.** *Пусть f(t) - функция-оригинал. Преобразованием Лапласа функции f(t) называется функция F(p) комплексного аргумента p:* $F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$. *В этом случае используют обозначение* $f(t) \risingdotseq F(p)$.

**Утверждение.** *Пусть f(t) - функция-оригинал с показателем роста* $S_0$ *и пусть* $f(t) \risingdotseq F(p)$. *Тогда F(p) определена и аналитична в полуплоскости* $\Re p > S_0$.

### 1.36 Свойства преобразований Лапласа

#### 1.36.1 Линейность

Пусть f(t) и g(t) функции-оригиналы с показателями роста $S_1$ и $S_2$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$. Тогда $\forall$ *const* $\alpha, \beta$ функция $\alpha f(t) + \beta g(t)$ функция-оригинал с показателем роста $\max(S_1, S_2)$ и $\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)$.

#### 1.36.2 Поведение F(p) в бесконечности

$\lim\limits_{\sigma\to+\infty} F(p) = 0,\ \sigma = \Re p$

#### 1.36.3 Дифференцирование оригинала

Если $f(t), f'(t)$ - функции-оригиналы и $f(t) \risingdotseq F(p)$, тогда:

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0)$$

### 1.36.4 Дифференцирование изображения

$f(t) \risingdotseq F(p) \Rightarrow F'(p) \fallingdotseq t \cdot f(t)$

### 1.36.5 Интегрирование оригинала

Пусть f(t) - функция-оригинал, $f(t) \risingdotseq F(p)$. Пусть f(t) непрерывна, тогда функция $\displaystyle\int_0^t f(t)dt$ является функцией-оригиналом и $\displaystyle\int_0^t f(t)dt \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

### 1.36.6 Интегрирование изображения

Пусть f(t) и $\frac{f(t)}{t}$ - функции-оригиналы, $f(t) \risingdotseq F(p)$. Пусть $\displaystyle\int_p^\infty F(p)dp$ сходится. Тогда $\displaystyle\int_p^\infty F(p)dp \fallingdotseq \frac{f(t)}{t}$.

### 1.36.7 Теорема подобия

$f(t) \risingdotseq F(p) \Rightarrow \forall \alpha > 0 : f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F(\frac{p}{\alpha})$

### 1.36.8 Теорема запаздывания

$f(t) \risingdotseq F(p) \Rightarrow \forall \tau > 0 : f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p)$

### 1.36.9 Теорема смещения

$f(t) \risingdotseq F(p) \Rightarrow \forall \lambda : e^{\lambda t} f(t) \risingdotseq F(p-\lambda)$

### 1.36.10 Теорема умножения

Пусть f(t), g(t) определены $\forall t$. Сверткой функций f(t) и g(t) называется функция

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t-\tau) d\tau$$

Если f, g - функции оригиналы, то $f(\tau) = 0$ при $\tau < 0, g(t-\tau) = 0$ при $t - \tau < 0 \;\Rightarrow t < \tau$. Тогда

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t) g(t-\tau) d\tau$$

**Теорема 38.** *Пусть f(t) и g(t) функции-оригиналы с показателями роста $S_1$ и $S_2$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$. Тогда $(f * g)(t)$ - функция-оригинал и $(f * g)(t) \risingdotseq F(p)G(p)$.*

### 1.36.11 Интеграл

Пусть $f(t), g(t), g'(t)$ - функции-оригиналы и $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$. Тогда

$$pF(p)G(p) \fallingdotseq g(0)f(t) + \int_0^t f(t) g'(t-\tau) dt$$

### 1.37 Применение преобразования Лапласа к решению обыкновенных ДУ

### 1.38 Конформное отображение. Достаточное условие конформности

Пусть функция f(z) непрерывна в окрестности $U(z_0)$.

**Определение 34.** *Отображение $\omega = f(z)$ называется конформным в точке $z_0$, если сохраняются угол и направление отсчета между любыми двумя кривыми (прямыми), проходящими через точку $z_0$.*

**Определение 35.** *Отображение $\omega = f(z)$ называется конформным в области $D$, если оно конформно в каждой точке $z \in D$.*

**Утверждение.** *Из приведенных выше рассуждений следует, что если f(z) аналитична в области $D$ и $f'(z) \neq 0 \; \forall z \in D$, то отображение $\omega = f(z)$ является конформным в области $D$.*

### 1.39 Теорема Римана

**Теорема 39** (Римана)**.** *Для любой односвязной области $D$, граница которой состоит более чем из одной точки, существует конформное отображение, переводящее $D$ в единичный круг $G = \{|\omega| < 1\}$.*

### 1.40 Теорема о соответствии границ

Если D и $D^*$ - области ограниченные замкнутыми кусочно-гладкими кривыми $\Gamma$ и $\Gamma^*$ и $\omega = f(z)$ осуществляет конформное отображение $D$ на $D^*$, то между $\Gamma$ и $\Gamma^*$ устанавливется взаимооднозначное и взаимонепрерывное отображение.

**Теорема 40** (Принцип соответствия границ)**.** *Пусть $D$ и $D^*$ - односвязные области, ограниченные кусочно-гладкими замкнутыми кривыми $\Gamma$ и $\Gamma^*$. Пусть f(z) аналитична в $D$ и непрерывна в $\overline{D}$, и f(z) осуществляет взаимооднозначное отображение $\Gamma \leftrightarrows \Gamma^*$. Тогда отображение $\omega = f(z)$ является конформным отображением, переводящим $D$ в $D^*$.*

### 1.41 Дробно-линейное отображение

$\omega = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$